AUFGABEN

AUS DER

ANALYTISCHEN GEOMETRIE

DER EBENE

VON

DR. ADOLF HOCHHEIM,

PROFESSOR.

HEFT I.

DIE GERADE LINIE, DER PUNKT, DER KREIS.

A. AUFGABEN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1882.

Vorwort.

Bei Herausgabe der vorliegenden Sammlung von Aufgaben war die Erwägung maſsgebend, daſs ein Studium der analytischen Geometrie nur dann wahrhaft fruchtbringend sein kann, wenn mit der theoretischen Behandlung zugleich die praktische Übung verbunden wird. Um für diese Übung ein ausgiebiges Material zu schaffen, galt es nicht nur die längst bekannten Theorieen zu berücksichtigen, sondern auch die zahlreichen groſsen Resultate, mit denen während der jüngsten Jahrzehnte die Wissenschaft bereichert worden ist, in leicht faſslichen Problemen zur Anwendung zu bringen. Für die Lösungen schien es angemessen, auch die Methoden der modernen Algebra zu benutzen.

Das Werk soll den Studierenden der Mathematik auf der Universität und der technischen Hochschule dienen, doch werden die ersten Hefte auch bei dem Unterrichte auf der obersten Stufe der Realschule Verwendung finden können.

Möchte es dem Buche gelingen, die Jünger der Wissenschaft bei ihrem Studium zu fördern und sie zur Selbstthätigkeit anzuregen.

Magdeburg, im Januar 1882.

Ad. Hochheim.

Bestimmung der Lage eines Punktes durch die Koordinaten desselben.

1. Bestimme die Lage der Punkte, deren Koordinaten sind: a) $x = 3$, $y = 5$; b) $x = -6$, $y = -1$; c) $x = 7$, $y = -2$; d) $x = -1$, $y = 4$; e) $x = 0$, $y = -3$; f) $x = 6$, $y = 0$; g) $x = 0$, $y = 0$.

2. Die Koordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks sind: $x_1 = 2$, $y_1 = 4$; $x_2 = -2$, $y_2 = 7$; $x_3 = -6$, $y_3 = -8$. Das Dreieck ist zu konstruieren.

3. Konstruiere das Viereck, dessen Eckpunkte die Koordinaten $x_1 = 7$, $y_1 = 2$; $x_2 = 0$, $y_2 = -9$; $x_3 = -3$, $y_3 = -1$; $x_4 = -6$, $y_4 = 4$ besitzen.

4. Gegeben sei die Abscisse $x = 4$. Es soll die zugehörige Ordinate gesucht und konstruiert werden

a) mit Hilfe der Gleichung $y = 2x - 9$;

b) . . . . $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$.

5. Wo liegen die Punkte, deren Koordinaten folgenden Gleichungen genügen:

a) $3x - 7y = 55$, $5x + 2y = -4$;

b) $2x - 3y = -3$, $11x - 16y = -19$;

c) $x^2 + (5-y)(5 - \frac{5}{2}x - y) = 0$, $x + y = 7$;

d) $9x^2 + 10xy + y^2 = 273$, $9x^2 - 10xy + y^2 = 33$?

6. Wie viel Punkte ergeben sich, wenn die eine Gleichung vom p^{ten}, die andere vom q^{ten} Grade ist?

7. Welches sind die Koordinaten derjenigen Punkte, welche auf der Abscissenachse oder der Ordinatenachse liegen und vom Koordinatenanfangspunkte den Abstand a haben? Welches sind die Koordinaten des Koordinatenanfangspunktes?

8. Gegeben sei ein Quadrat mit der Seite s. Durch den Schnittpunkt der Diagonalen sei ein rechtwinkliges Achsensystem gelegt. Welches sind die Koordinaten der Ecken,

a) wenn die Seiten den Achsen parallel laufen?
b) wenn die Diagonalen auf den Achsen liegen?

9. In welcher Beziehung stehen die Koordinaten zweier Punkte, deren Verbindungslinie im Koordinatenanfangspunkte halbiert wird?

10. Ein reguläres Achteck besitze die Seite s. Der Mittelpunkt desselben sei Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Welches sind die Koordinaten der Ecken,
a) wenn zwei Seiten desselben der Y-Achse parallel laufen?
b) wenn die Abscissenachse durch zwei gegenüberliegende Ecken geht?

Die Entfernung zweier Punkte.

11. Gegeben seien die rechtwinkligen Koordinaten der beiden Punkte A und B: (x_1, y_1), (x_2, y_2). Wie grofs ist die Entfernung zwischen beiden?

Beispiele.
a) $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $x_2 = 8$, $y_2 = 6$.
b) $x_1 = 5$, $y_1 = 24$, $x_2 = 17$, $y_2 = 29$.
c) $x_1 = 27$, $y_1 = -11$, $x_2 = -3$, $y_2 = -7$.

12. Der Koordinatenwinkel betrage 60^0. Die Koordinaten des Punktes A seien $x_1 = 9$, $y_1 = -4$, die des Punktes B $x_2 = 11$, $y_2 = 7$. Wie weit sind beide Punkte von einander entfernt?

13. Die Polarkoordinaten des Punktes A seien $r_1 = 17$, $\varphi_1 = 30^0\ 11'$, die des Punktes B $r_2 = 19$, $\varphi_2 = 172^0\ 30'$. Wie grofs ist der Abstand zwischen beiden Punkten?

14. Welches sind die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte der Y-Achse, die von dem Punkte (x_1, y_1) den Abstand d haben?

15. Welche Bedingung mufs erfüllt sein, wenn der Punkt (x_1, y_1) von dem Punkte $(7, -2)$ die Entfernung 11 haben soll?

16. Welcher Bedingung müssen die Koordinaten eines Punktes (x, y) Genüge leisten, wenn er von den Punkten $(2, 5)$, $(-11, 1)$ gleiche Entfernung haben soll?

17. Die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks sind (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Wie lang sind die Seiten desselben?

Beispiele.
a) $x_1 = 2$, $y_1 = -13$, $x_2 = -9$, $y_2 = 5$, $x_3 = 17$, $y_3 = 23$.
b) $x_1 = 5$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = 29$, $x_3 = 18$, $y_3 = 4$.

18. Die Koordinaten der Ecken eines Vierecks seien $(3, 4)$, $(7, -1)$, $(-6, -5)$, $(-16, 11)$. Wie lang sind die Seiten? Wie lang die Diagonalen?

19. Die Länge einer Strecke sei $= \sqrt{314}$. Die Koordinaten des einen Endpunktes seien $x_1 = 5$, $y_1 = -3$, die Abscisse des zweiten $x_2 = 22$. Wie groſs ist die Ordinate des letzteren?

Teilung einer Strecke nach einem bestimmten Verhältnis.

20. Gegeben seien die Koordinaten der Endpunkte einer Strecke (x_1, y_1), (x_2, y_2). Welches sind die Koordinaten desjenigen Punktes, der diese Strecke im Verhältnis $m:n$ teilt?

Beispiele.

a) $x_1 = 7$, $y_1 = 11$, $x_2 = 13$, $y_2 = 4$, $m = 1$, $n = 1$.

b) $x_1 = -2$, $y_1 = 3$, $x_2 = 12$, $y_2 = -6$, $m = 1$, $n = 2$.

c) $x_1 = 3$, $y_1 = 13$, $x_2 = -7$, $y_2 = -1$, $m = 4$, $n = 7$.

21. Die Koordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks seien $x_1 = 3$, $y_1 = 5$, $x_2 = 7$, $y_2 = -9$, $x_3 = -2$, $y_3 = -4$. Welches sind die Koordinaten der Halbierungspunkte der Seiten? Welches sind die Koordinaten des Schwerpunktes?

22. Die Koordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks seien $(5, -7)$, $(1, 11)$, $(-4, 13)$. Welches sind die Koordinaten des Schwerpunktes? Wie weit ist derselbe vom zweiten Eckpunkte und wie weit vom Koordinatenanfangspunkte entfernt?

23. Eine Strecke sei in drei gleiche Teile geteilt. Der eine Endpunkt besitze die Koordinaten $(3, 8)$, der zunächst liegende Teilpunkt $(4, 13)$. Welches sind die Koordinaten des anderen Endpunktes?

24. Die Strecke AB soll über jeden ihrer Endpunkte hinaus um ihre Hälfte verlängert werden. Welches sind die Koordinaten der Endpunkte der Verlängerungen? Die Koordinaten von A seien $(5, 6)$, die von B $(7, 2)$.

25. Die Koordinaten von drei Eckpunkten eines Parallelogramms sind bekannt: $(1, 2)$, $(-5, -3)$, $(7, -6)$. Welches sind die Koordinaten des vierten Eckpunktes?

26. Die Strecke AB soll über B hinaus soweit verlängert werden, dafs sie sich zu ihrer Verlängerung wie 4 zu 7 verhält. Die Koordinaten von A seien (5, 4), die von B (6, — 9).

27. Die eine Seite eines Dreiecks sei im Verhältnis m zu n geteilt, die Verbindungslinie dieses Teilpunktes mit der gegenüberliegenden Ecke im Verhältnis p zu q. Welches sind die Koordinaten des letzteren Teilpunktes?

Transformation der Koordinaten.

28. Gegeben sei die Gleichung $y = 5x - 6$. Welche Gestalt nimmt dieselbe an, wenn sie auf ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen wird, dessen Achsen den ursprünglichen parallel sind und sich im Punkte (5, 4) schneiden?

29. Die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes genügen der Gleichung $x^2 + 14x + y^2 - 10y + 49 = 0$. Welche Form nimmt dieselbe an, wenn ein neues System zu Grunde gelegt wird, dessen Achsen den ursprünglichen parallel sind und sich im Punkte (— 7, 5) durchschneiden?

30. Die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes genügen der Relation $y = f(x)$. Welche Umwandlung erfährt dieselbe, wenn man ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem zu Grunde legt, welches denselben Anfangspunkt besitzt, dessen Achsen aber gegen die ursprünglichen unter dem Winkel α geneigt sind?

Beispiele.

a) $(y^2 + x^2)(x \operatorname{tg} \alpha + y) = 2ay(x - y \operatorname{tg} \alpha)$, der Drehungswinkel sei α.

b) $(x^2 - y^2)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + xy(\sqrt{3} - \frac{1}{2}) + x\sqrt{3} + y = 0$, Drehungswinkel $= 30^0$.

31. Gegeben sei die Gleichung $x^2 - y^2 = a^2$; dieselbe soll auf ein neues Koordinatensystem transformiert werden, dessen Achsen die Halbierungslinien der rechten Winkel des ursprünglichen Systems sind.

32. Der Gleichung $2y^2 + 2xy + x^2 + 4R^2 = 0$ genügen die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes. Um welchen Winkel

mufs das Koordinatensystem gedreht werden, wenn die aus der Transformation hervorgehende Gleichung das Produkt der beiden neuen Koordinaten nicht enthalten soll?

33. Um welchen Winkel mufs ein rechtwinkliges Koordinatensystem gedreht werden, damit die X-Achse in ihrer neuen Lage durch den Punkt $x_1 = 5$, $y_1 = 7$ hindurchgeht?

34. Der Koordinatenwinkel eines schiefwinkligen Systems betrage 45^0. Es mögen die Halbierungslinien dieses Winkels und seines Nebenwinkels zu Achsen eines neuen Systems genommen werden. Wie lauten die Transformationsformeln?

Beispiel. $x^2(4 - 3\sqrt{2}) + y^2(4 + 3\sqrt{2}) + 4xy\sqrt{2} = 0.$

35. Der Koordinatenwinkel eines Achsensystems betrage 60^0. Die Y-Achse möge um den Koordinatenanfangspunkt so gedreht werden, dafs sie lotrecht zur X-Achse steht. Welches sind die Transformationsgleichungen?

Beispiel. $y^2 + 7xy + \frac{5}{2}y + 5x + 7x^2 = 0.$

36. Gegeben sei ein schiefwinkliges Koordinatensystem mit dem Koordinatenwinkel α. Durch den Koordinatenanfangspunkt seien zwei neue Achsen gelegt mit dem Koordinatenwinkel β. Die neue X-Achse schliefse mit der ursprünglichen den Winkel γ ein. Welches sind die Transformationsgleichungen?

37. Ein rechtwinkliges Koordinatensystem werde um den Winkel α gedreht und aufserdem so fortgeschoben, dafs der Koordinatenanfangspunkt mit dem Punkte (α, b) zusammenfällt. Welche Gestalt nimmt die Gleichung $y = f(x)$ an, der die Koordinaten (x, y) eines gegebenen Punktes genügen?

Beispiel.

$$\tfrac{1}{8}(x^3\sqrt{3} + 3y^3) - \tfrac{5}{8}x^2y + \tfrac{1}{8}\sqrt{3}xy^2 + x^2(\tfrac{5}{8} - \tfrac{3}{4}\sqrt{3}) - y^2(\tfrac{9}{8} + \tfrac{1}{4}\sqrt{3})$$
$$+ xy(\tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{4}\sqrt{3}) + x(\tfrac{13}{8}\sqrt{3} - \tfrac{5}{2}) - y(\tfrac{11}{8} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}) - \tfrac{5}{4}\sqrt{3} - \tfrac{1}{8} = 0;$$
$$a = 2,\ b = 1,\ \alpha = 30^0.$$

38. Die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes genügen der Gleichung $y = \varphi(x)$, Welche Form nimmt diese Relation an bei Einführung von Polarkoordinaten, wenn der Pol die rechtwinkligen Koordinaten (a, b) besitzt und die feste Achse PS zur X-Achse unter dem Winkel α geneigt ist?

Beispiele.

1) $y^2 - 6y + 9 - 5x = 0$, $a = \frac{5}{4}$, $b = 3$, $\alpha = 0^0$.

2) $x^2 - 4x - y^2 - 6y - 54 = 0$, $a = 2$, $b = -3$, $\alpha = 0^0$.

3) $(x^2 + y^2)^2 = k^2(x^2 - y^2)$, $a = 0$, $b = 0$, $\alpha = 0^0$.

39. Die Polarkoordinaten eines Punktes sind durch rechtwinklige zu ersetzen unter der Bedingung, dafs die Abscissenachse des rechtwinkligen Systems mit der festen Achse und der Koordinatenanfangspunkt mit dem Pol zusammenfällt.

Beispiele. 1) $\varrho = \frac{k\vartheta}{2\pi}$.

2) $\varrho = k \sin 2\vartheta$.

3) $\varrho = \frac{5k \sin\vartheta \cos\vartheta}{\sin^3\vartheta + \cos^3\vartheta}$.

Die gerade Linie.

(Rechtwinklige Koordinaten.)

Die Gleichung der geraden Linie.

40. Welche Bedeutung haben die konstanten Gröfsen in folgenden Gleichungen:

α) $y = Ax + b$, β) $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$,

γ) $x \cos\varphi + y \sin\varphi = p$, δ) $y - b = \operatorname{tg}\varphi\,(x - a)$?

41. Die Lage einer geraden Linie ist aus ihrer Gleichung zu bestimmen.

Beispiele.

1) $x = a$; 2) $x = 0$; 3) $x = -b$;

4) $y = 2$; 5) $y = -7$; 6) $y = x$;

7) $y = -x$; 8) $y = \frac{5}{4}x$; 9) $y = -\frac{7}{3}x$;

10) $y = x + a$; 11) $y = \frac{3}{4}x + 7$; 12) $y = \frac{x}{3} - 9$;

13) $y = -x + 3$; 14) $y = -\frac{x}{4} - 11$; 15) $\frac{x}{6} - \frac{y}{7} = 1$;

16) $-\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$; 17) $\frac{x}{11} + \frac{y}{3} = -1$; 18) $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 5$;

19) $y - 5 = \frac{2}{3}(x-3)$; 20) $y + 6 = -\frac{4}{7}(x-12)$.

42. Aus der Gleichung einer Geraden $Lx + My + N = 0$ ist der Neigungswinkel derselben zur X-Achse zu bestimmen.

Beispiele. *a*) $5x - 3y + 7 = 0$; *b*) $7x + 11y - 3 = 0$.

43. Aus der Gleichung einer Geraden $Lx + My + N = 0$ ist die Normalgleichung derselben zu entwickeln.

Beispiele. *a*) $3x + 4y + 2 = 0$; *b*) $12x + 5y - 26 = 0$.

Bestimmung der Gleichung einer geraden Linie aus gegebenen Stücken.

44. Durch die Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) werde eine gerade Linie gelegt. Welches ist die Gleichung derselben?

Beispiele. a) $x_1 = 4,\ y_1 = 5,\ x_2 = 7,\ y_2 = 11$.
b) $x_1 = -3{,}5,\ y_1 = 16,\ x_2 = 5{,}2,\ y_2 = -7$.
c) $x_1 = 0,\ y_1 = 2{,}1,\ x_2 = -1{,}4,\ y_2 = 0$.

Welchen Abstand hat jede dieser Geraden vom Koordinatenanfangspunkte?

45. Welches ist die Gleichung einer Geraden, die auf dem positiven Teile der X-Achse eine Strecke von der Länge 7, auf dem negativen Teile der Y-Achse eine Strecke von der Länge 2 abschneidet?

46. Gegeben seien die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks. Welches sind die Gleichungen der Seiten?

a) $x_1 = -1,\ y_1 = -1,\ x_2 = -3,\ y_2 = 5,\ x_3 = 7,\ y_3 = 11$.
b) $x_1 = 8{,}5,\ y_1 = 2{,}3,\ x_2 = 13,\ y_2 = -4{,}2,\ x_3 = -1{,}2,\ y_3 = 2$.

47. Die Koordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks seien $x_1 = 5,\ y_1 = -7,\ x_2 = 1,\ y_2 = 11,\ x_3 = -4,\ y_3 = 13$. Welches sind die Gleichungen der Schwerpunktstransversalen?

48. Die Koordinaten der Eckpunkte eines Vierecks seien $x_1 = 0,\ y_1 = 0,\ x_2 = 1,\ y_2 = 5,\ x_3 = 7,\ y_3 = 0,\ x_4 = 4,\ y_4 = -9$. Welches sind die Gleichungen der Seiten und der Diagonalen?

49. Die Strecke zwischen den beiden Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) sei im Verhältnis m zu n geteilt. Welches ist die Gleichung der Geraden, welche den Punkt (x_3, y_3) mit dem Teilpunkte verbindet?

Beispiel. $x_1 = 6$, $y_1 = 2$, $x_2 = 7$, $y_2 = -3$, $x_3 = -5$, $y_3 = -5$, $m = 2$, $n = 5$,

50. Gegeben seien die Koordinaten der Eckpunkte eines Vierecks. Jede Seite desselben sei im Verhältnis m zu n geteilt. Welches sind die Gleichungen der Verbindungslinien der Teilpunkte?

Beispiel.

$x_1 = 0$, $y_1 = 7$, $x_2 = 5$, $y_2 = 11$, $x_3 = 4$, $y_3 = -3$,
$x_4 = -1$, $y_4 = -5$, $m = 1$, $n = 2$.

51. Welche Bedingung mufs erfüllt sein, wenn die drei Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) in einer Geraden liegen sollen?

52. Welches ist die Gleichung einer Geraden, die durch den Punkt (x_1, y_1) geht und mit der X-Achse den Winkel φ einschliefst?

Beispiele. a) $x_1 = 2$, $y_1 = 7$, $\varphi = 60^0$;
b) $x_1 = -3$, $y_1 = 11$, $\varphi = 45^0$;
c) $x_1 = 13$, $y_1 = -4$, $\varphi = 150^0$.

53. Es ist die Gleichung einer Geraden zu bestimmen, die mit der Abscissenachse den Winkel $\alpha = 30^0$ einschliefst und auf dem positiven oder negativen Teile derselben eine Strecke $a = 7{,}5$ abschneidet.

54. Die Gleichung einer Geraden ist anzugeben, welche mit der X-Achse den Winkel $\alpha = 67^0$ einschliefst und auf dem positiven oder negativen Teile der Y-Achse eine Strecke $a = 0{,}34$ abschneidet.

55. Durch den Punkt $x_1 = 5$, $y_1 = 4$ ist eine Gerade so zu legen, dafs das von ihr und den Abschnitten auf den positiven Achsenteilen gebildete rechtwinklige Dreieck den Inhalt 80 □ hat. Welches ist die Gleichung der Geraden?

56. Durch den Punkt $x_1 = -12$, $y_1 = 12$ ist eine Gerade zu legen, welche die negativen Teile der Koordinatenachsen schneidet und zwar so, dafs das von ihr und den Abschnitten begrenzte Dreieck den Inhalt 6 □ hat.

57. Durch den Punkt (x_1, y_1) ist eine Gerade zu legen, so dafs der Abschnitt auf dem positiven oder negativen Teile der Abscissenachse sich zu y_1 wie m zu n verhält.

Beispiel. $x_1 = 7$, $y_1 = 2$, $m = 5$, $n = 3$.

58. Welches ist die Gleichung einer Geraden, die durch den Punkt (x_1, y_1) geht und vom Koordinatenanfangspunkte den Abstand p besitzt?

Beispiele: a) $x_1 = 11,\ y_1 = 3,\ p = 7.$

b) $x_1 = -4,\ y_1 = 3,\ p = 5.$

59. Durch den Punkt (x_1, y_1) soll eine Gerade gelegt werden, so daſs der Abschnitt zwischen den Achsen durch den gegebenen Punkt im Verhältnis $m : n$ geteilt wird.

Beispiele. a) $x_1 = 5,\ y_1 = 7,\ m = 1,\ n = 1.$

b) $x_1 = -4,\ y_1 = 3,\ m = 5,\ n = 3.$

Der Abstand eines Punktes von einer Geraden.

60. Welches ist die Länge des Lotes, welches sich von einem Punkte (x_1, y_1) auf eine gegebene Gerade fällen läſst? Die Gleichung der Geraden sei

1) $y \sin\varphi + x \cos\varphi = p$, 2) $y = Mx + n$,

3) $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$, 4) $Lx + My + N = 0.$

Beispiele.

a) $3x = y - 5,\ x_1 = 1,\ y_1 = 13.$

b) $y + \frac{6}{7}x = 1,\ x_1 = 5{,}6,\ y_1 = 4{,}8.$

c) $\frac{y}{3} - \frac{x}{4} = 1,\ x_1 = -4,\ y_1 = -2.$

d) $7x - 6y + 8 = 0,\ x_1 = 10,\ y_1 = -1{,}1666\ldots$

e) $5y + 13x - 4 = 0,\ x_1 = 5,\ y_1 = -12{,}2.$

61. Die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks sind (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Wie groſs sind die Höhen desselben? Wie lang sind die Lote, die sich vom Koordinatenanfangspunkte auf die Seiten fällen lassen?

Beispiele.

a) $x_1 = 3,\ y_1 = 5,\ x_2 = 7,\ y_2 = -4,\ x_3 = -11,\ y_3 = -13.$

b) $x_1 = -1,\ y_1 = 7,\ x_2 = 10,\ y_2 = -2,\ x_3 = 15,\ y_3 = 17.$

62. Gegeben seien die Gleichungen von zwei parallelen Geraden $y = 9x - 1$ und $y = 9x + 7$. Welchen Abstand haben beide von einander?

63. Durch den Punkt (x_1, y_1) ist eine Gerade zu ziehen, deren Abstand von dem Punkte (x_2, y_2) gleich d ist. Welches ist die Gleichung der Geraden?

Beispiele.

a) $x_1 = 6,\ y_1 = 7,\ x_2 = 5,\ y_2 = -8,\ d = \sqrt{113}$;

b) $x_1 = 3,\ y_1 = 12,\ x_2 = 7,\ y_2 = 2,\ d = \sqrt{58}$.

64. Es soll durch den Punkt (x_1, y_1) eine Gerade gezogen werden, so dafs die Lote, welche sich von den Punkten (x_2, y_2) und (x_3, y_3) auf dieselbe fällen lassen, einander gleich sind.

Beispiele.

a) $x_1 = 7,\ y_1 = 11,\ x_2 = 3,\ y_2 = 4,\ x_3 = 9,\ y_3 = 5$;

b) $x_1 = -2,\ y_1 = 5,\ x_2 = 3,\ y_2 = -7,\ x_3 = -4,\ y_3 = 1$.

65. Der Koordinatenwinkel sei gleich 60^0. Wie lang ist das Lot, welches sich vom Punkte (x_1, y_1) auf die Gerade $Lx + My + N = 0$ fällen läfst?

Die Koordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden.

66. Welches sind die Koordinaten des Punktes, in dem sich die beiden Geraden $L_1x + M_1y + N_1 = 0$, $L_2x + M_2y + N_2 = 0$ schneiden?

Beispiele.

a) $3x - 4y + 13 = 0,\ 11x + 7y - 104 = 0$;

b) $5x + y + 1 = 0,\ y = 17x + 13$;

c) $\frac{x}{10} + \frac{y}{7} = 1,\ y = 2x + 3$;

d) $\frac{y}{2} - \frac{x}{5} = 1,\ \frac{y}{13} + \frac{x}{21} = -1$.

67. Gegeben seien die Koordinaten von vier Punkten. Welches sind die Koordinaten des Punktes, in dem die Verbindungslinie des ersten und zweiten Punktes die des dritten und vierten durchschneidet?

Beispiel.

$x_1 = 4,\ y_1 = 5,\ x_2 = 7,\ y_2 = 11,\ x_3 = -1,\ y_3 = -1,\ x_4 = -3,\ y_4 = 5$.

68. Die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks seien
$L_1x + M_1y + N_1 = 0,\ L_2x + M_2y + N_2 = 0,\ L_3x + M_3y + N_3 = 0$.
Welches sind die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks?

Beispiele.

a) $2x - 5y + 31 = 0,\ 11x + 3y - 104 = 0,\ x + y + 7 = 0;$

b) $3x + 5y - 69 = 0,\ 5x - 7y - 21 = 0,\ 2x + 9y + 16 = 0.$

69. Gegeben seien die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks

$$2y + 5x - 29 = 0,\ y - 9x + 43 = 0,\ y + 14x - 49 = 0.$$

Zu bestimmen sind:

a) die Gleichungen der Schwerpunktstransversalen,

b) die Koordinaten des Schwerpunkts,

c) die Abstände des Schwerpunkts von den Seiten des Dreiecks.

70. Wie lang sind die Seiten eines Dreiecks, wenn die Gleichungen derselben

$$y + 3x + 4 = 0,\ 5y - 3x - 34 = 0,\ 2y - 3x - 1 = 0$$

sind? Wie lang sind ferner die Höhen derselben?

71. Welche Bedingung mufs erfüllt sein, wenn sich die drei Geraden, deren Gleichungen

$$L_1x + M_1y + N_1 = 0,\ L_2x + M_2y + N_2 = 0,\ L_3x + M_3y + N_3 = 0$$

sind, in einem Punkte schneiden sollen?

a) Welche Form nimmt die Bedingungsgleichung an, wenn die Gleichungen der Geraden

$$y = A_1x + b_1,\ y = A_2x + b_2,\ y = A_3x + b_3$$

lauten?

72. Die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks seien $(0, 0)$, $(x_2, 0)$, (x_3, y_3). Es ist zu zeigen, dafs sich die Mittellinien desselben in einem Punkte schneiden.

73. Welche Bedingung mufs erfüllt sein, wenn der Durchschnittspunkt zweier Geraden in der Unendlichkeit liegen soll? Die Gleichungen der Geraden seien

a) $y = A_1x + b_1,\ y = A_2x + b_2.$

b) $\dfrac{x}{p_1} + \dfrac{y}{q_1} = 1,\ \dfrac{x}{p_2} + \dfrac{y}{q_2} = 1.$

74. Gegeben seien die Gleichungen der Seiten eines Parallelogrammes:

$$y - 3x + 9 = 0,\ 3y + 5x - 18 = 0,$$
$$y - 3x - 1 = 0,\ 3y + 5x - 2 = 0.$$

Welches sind die Koordinaten der Eckpunkte? Welches sind die Gleichungen der Diagonalen? In welchem Punkte durchschneiden sich die Diagonalen?

75. Die Gleichungen der Seiten eines Vierecks seien

$$3y - 8x - 13 = 0,\quad 2y - x - 13 = 0,$$
$$y + 7x - 44 = 0,\quad 8y - 3x + 2 = 0.$$

Wie lang sind die Seiten? Wie lang die Diagonalen desselben?

76. Aus den Gleichungen der Seiten eines vollständigen Vierseits

$$y - 5x = 0,\quad 6y + 5x - 35 = 0,\quad y - 3x + 21 = 0,\quad 4y + 9x = 0$$

sollen bestimmt werden

a) die Koordinaten der Eckpunkte,
b) die Gleichungen der Diagonalen,
c) die Gleichungen der Verbindungslinien der Halbierungspunkte der Diagonalen.

77. In welchem Verhältnis wird die Verbindungslinie der Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) durch die Gerade $Lx + My + N = 0$ geteilt?

Beispiele.

a) $x_1 = 1,\ y_1 = 1,\ x_2 = 11,\ y_2 = 13;\ 6x + 5y - 30 = 0.$
b) $x_1 = 3,\ y_1 = 2,\ x_2 = 6,\ y_2 = -3;\ y = 2x + 14.$

78. Gegeben seien vier Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4). In welchem Verhältnis teilt die Verbindungslinie der beiden ersten Punkte die der beiden letzten?

Beispiel.

$$x_1 = 3,\ y_1 = 4,\ x_2 = 5,\ y_2 = 1,\ x_3 = 2,\ y_3 = -2,\ x_4 = 10,\ y_4 = 3.$$

79. Gegeben seien die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks ABC, nämlich (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Eine Gerade $Lx + My + N = 0$ schneide die Seite AB in C_1, BC in A_1, CA in B_1. Welche Beziehung ergiebt sich zwischen den Seitenabschnitten des Dreiecks?

80. Eine Gerade, deren Gleichung $Lx + My + N = 0$ sei, schneide die Seiten des Vierecks $ABCD$ und zwar AB in A_1, BC in B_1, CD in C_1, DA in D_1. Es soll die Relation entwickelt werden, welche zwischen den Seitenabschnitten besteht.

81. Die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks ABC seien (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Von dem Punkte 0, dessen Koordinaten x_4, y_4, mögen Gerade nach den Ecken gezogen und so weit verlängert sein, bis sie die Dreiecksseiten resp. deren Verlängerungen durchschneiden. Welche Relation ergiebt sich für die Seitenabschnitte?

Der Inhalt eines Polygons.

82. Gegeben seien die Koordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks: (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Welches ist der Inhalt desselben? Welche geometrische Bedeutung hat demnach das in der Lösung von Aufgabe 51 gewonnene Resultat?

Beispiele.

a) $x_1 = 3,\ y_1 = 5,\ x_2 = 7,\ y_2 = 11,\ x_3 = 9,\ y_3 = 1.$

b) $x_1 = -2,\ y_1 = -1,\ x_2 = 13,\ y_2 = 14,\ x_3 = 12,\ y_3 = 0.$

c) $x_1 = -3,\ y_1 = 5,\ x_2 = 11,\ y_2 = 10,\ x_3 = 2,\ y_3 = -7.$

83. Die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks sind:

$$x_1 = 0,\ y_1 = \frac{s}{3}\sqrt{3},\ x_2 = \frac{s}{2},\ y_2 = -\frac{s}{6}\sqrt{3},\ x_3 = -\frac{s}{2},\ y_3 = -\frac{s}{6}\sqrt{3}.$$

Welches ist der Inhalt des Dreiecks?

84. Aus den Gleichungen der Seiten eines Dreiecks

$$L_1x + M_1y + N_1 = 0,\ L_2x + M_2y + N_2 = 0,\ L_3x + M_3y + N_3 = 0$$

soll der Inhalt desselben bestimmt werden. Welche geometrische Bedeutung hat das in der Lösung von Aufgabe 71 gewonnene Resultat?

Beispiele.

a) $y + 3x + 4 = 0,\ 5y - 3x - 34 = 0,\ 2y - 3x - 1 = 0.$

b) $9y + 13x - 131{,}2 = 0, \quad 71y + 31x - 104{,}8 = 0,$
$97y - 3x - 197{,}6 = 0.$

85. Auf der Geraden $y = 5x - 6$ sei eine Strecke abgeschnitten, deren Endpunkte die Abscissen $x_1 = 4$ und $x_2 = 7$ besitzen. Beide Endpunkte mögen mit dem Punkte $x_3 = 2$, $y_3 = 11$ durch gerade Linien verbunden sein. Welches ist der Inhalt des so entstandenen Dreiecks?

86. Auf der Geraden $\frac{y}{4} - \frac{x}{23} = 1$ sei eine Strecke abge-

schnitten, deren Endpunkte die Ordinaten $y_1 = -2$, $y_2 = 17$ besitzen. Beide Endpunkte mögen mit dem Punkte $x_3 = -10$, $y_3 = 37$ durch gerade Linien verbunden sein. Welches ist der Inhalt des von diesen Geraden gebildeten Dreiecks?

87. Die Punkte, in welchen die Gerade $x \cos 30^0 + y \sin 30^0 = 7$ die beiden Koordinatenachsen schneidet, mögen mit dem Punkte $x_1 = 11$, $y_1 = 13$ durch gerade Linien verbunden sein. Welches ist der Inhalt des so entstandenen Dreiecks?

88. Drei Punkte der Geraden $5x + 7y - 9 = 0$, deren Abscissen $x_1 = 2$, $x_2 = -5$, $x_3 = -17$ sind, mögen mit dem Punkte $x_4 = 5$, $y_4 = 12$ durch gerade Linien verbunden sein. Wie verhalten sich die Inhalte der so entstandenen Dreiecke?

89. Gegeben seien die Gleichungen der drei Seiten eines Dreiecks:

$$x - 5y + 11 = 0,\ 11x + 6y - 1 = 0,\ x + y + 4 = 0.$$

Welches ist der Inhalt des Dreiecks, dessen Ecken die Halbierungspunkte der Seiten des gegebenen Dreiecks sind?

90. Die Koordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks seien

$$x_1 = 10,\ y_1 = 13,\ x_2 = 2,\ y_2 = -1,\ x_3 = -5,\ y_3 = 7.$$

Man halbiere die erste Seite, teile die zweite im Verhältnis 1 zu 2, die dritte im Verhältnis 2 zu 3 und verbinde die Teilpunkte. Welches ist der Inhalt des von den Verbindungslinien gebildeten Dreiecks?

91. In einem Dreieck sei jede Seite in drei gleiche Teile zerlegt, und die jeder Ecke zunächst liegenden Teilpunkte seien durch gerade Linien verbunden. Welches ist der Inhalt des so entstandenen Sechsecks?

Beispiel.

$$x_1 = 0,\ y_1 = 0,\ x_2 = 7,\ y_2 = 11,\ x_3 = 9,\ y_3 = 2.$$

92. Gegeben seien die Gleichungen der Seiten eines Parallelogramms

$$y = A_1x + b_1,\ y = A_2x + b_2,\ y = A_1x + b_3,\ y = A_2x + b_4.$$

Welches ist der Inhalt der Figur?

Beispiel.

$$y = 3x - 9,\ y = \tfrac{1}{2}x - 3,\ y = 3x + 5,\ y = \tfrac{1}{2}x + 7.$$

93. Die Gleichungen der vier Seiten eines Trapezes sind

$$y = M_1 x + n, \; y = M_2 x, \; y = M_1 x + n_2, \; y = M_3 x.$$

Welches ist der Flächeninhalt des Trapezes?

Beispiel.

$$y = -\tfrac{1}{3}x + 6, \; y = \tfrac{1}{2}x, \; y = -\tfrac{1}{3}x + 13, \; y = 3x.$$

94. Die Koordinaten der Ecken eines Trapezoides sind (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4). Wie grofs ist der Flächeninhalt desselben?

Beispiele.

a) $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = 5$, $x_3 = 11$, $y_3 = 9$, $x_4 = 7$, $y_4 = 0$.

b) $x_1 = -4$, $y_1 = -3$, $x_2 = 2$, $y_2 = 8$, $x_3 = 7$, $y_3 = 9$, $x_4 = 6$, $y_4 = 3$.

95. Die Gleichungen der Seiten eines Vierecks sind

$$5y - 2x - 11 = 0, \; y + 4x - 33 = 0, \; 10y + x + 21 = 0, \; 3y - 5x + 1 = 0.$$

Man halbiere die Seiten und verbinde die Teilpunkte durch gerade Linien. Welches ist der Inhalt des eingeschriebenen Vierecks?

96. Gegeben sind die Koordinaten der Ecken eines Fünfecks:

$x_1 = -5$, $y_1 = -2$, $x_2 = -1$, $y_2 = 4$, $x_3 = 4$, $y_3 = 5$
$x_4 = 5$, $y_4 = -2$, $x_5 = 1$, $y_5 = -6$.

Wie grofs ist der Inhalt des Fünfecks?

97. Jede Seite eines Trapezoids sei in drei gleiche Teile zerlegt, und die jeder Ecke zunächst liegenden Teilpunkte durch gerade Linien verbunden. Wie grofs ist der Inhalt des so entstandenen Achtecks?

Beispiel.

$x_1 = 2$, $y_1 = 3$, $x_2 = 7$, $y_2 = 5$, $x_3 = 9$, $y_3 = -3$, $x_4 = -1$, $y_4 = -2$.

98. Aus den Koordinaten der n Ecken eines n-Ecks soll der Inhalt desselben berechnet werden.

Gerade Linien, welche durch einen Punkt gehen.

99. Es ist die Gleichung einer beliebigen Geraden zu bestimmen, welche durch den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$L_1 x + M_1 y + N_1 = 0 \quad \text{und} \quad L_2 x + M_2 y + N_2 = 0$$

geht.

100. Welche Werte mufs man k in der Gleichung

$$L_1x + M_1y + N_1 + k(L_2x + M_2y + N_2) = 0$$

erteilen, damit dieselbe auch den Fundamentallinien entspricht?

101. Durch den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$L_1x + M_1y + N_1 = 0,\ L_2x + M_2y + N_2 = 0$$

und den Punkt (x_1, y_1) ist eine Gerade zu legen. Welches ist die Gleichung derselben?

Beispiele.

a) $5x - 2y + 3 = 0,\ 13x + y - 1 = 0,\ x_1 = 0,\ y_1 = 0.$

b) $2x + 5y - 8 = 0,\ 3x - 4y - 8 = 0,\ x_1 = 1,\ y_1 = 11.$

c) $17x + 21y + 1 = 0,\ 11x + 2y - 3 = 0,\ x_1 = -4,\ y_1 = 3.$

102. Durch den Schnittpunkt der Geraden

$$5x - 4y + 3 = 0,\ 7x + 11y - 1 = 0$$

ist eine Gerade zu legen, die auf dem positiven Teile der Y-Achse eine Strecke gleich 6 abschneidet. Welches ist die Gleichung derselben?

103. Durch den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$y = 7x - 4,\ y = -2x + 5$$

soll eine Gerade gezogen werden, welche mit der X-Achse einen Winkel von 60^0 einschliefst.

104. Durch den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$2y - 3x - 11 = 0,\ 7y + 6x - 55 = 0$$

ist eine Gerade zu ziehen, deren Abstand vom Koordinatenanfangspunkte gleich 5 ist.

105. Gegeben sind die Gleichungen zweier Geraden

$$24y - 16x + 17 = 0 \quad \text{und} \quad 8y - 40x + 179 = 0.$$

Durch den Schnittpunkt derselben ist eine Gerade zu legen, so dafs das von ihr und den Abschnitten auf den positiven Achsenteilen gebildete Dreieck den Inhalt 28 □ hat.

106. Gegeben sind die Gleichungen zweier Geradenpaare

$$5y - 2x - 11 = 0,\ y + 4x - 33 = 0$$

und $$10y + x + 21 = 0,\ 3y - 5x + 1 = 0.$$

Welches ist die Gleichung der Geraden, die den Schnittpunkt des ersten Paares mit dem des zweiten Paares verbindet?

107. Es ist zu zeigen, daſs die drei Geraden
$L_1x+M_1y+N_1=0$, $L_2x+M_2y+N_2=0$, $L_3x+M_3y+N_3=0$
durch einen Punkt gehen, wenn sich drei Konstante k_1, k_2, k_3 finden lassen, die so beschaffen sind, daſs die Summe
$k_1(L_1x+M_1y+N_1)+k_2(L_2x+M_2y+N_2)+k_3(L_3x+M_3y+N_3)$
für alle möglichen Werte von x und y verschwindet.

108. Die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks sind

$$y=0,\ y=\frac{y_3}{x_3}x,\ y-y_3=\frac{y_3}{x_3-x_2}(x-x_3).$$

Es ist zu zeigen, daſs die drei Mittellinien desselben durch einen Punkt gehen.

Bestimmung des Winkels, welchen zwei gerade Linien einschlieſsen.

109. Aus den Gleichungen zweier Geraden

$$y=A_1x+b_1 \quad \text{und} \quad y=A_2x+b_2$$

soll der Winkel bestimmt werden, den beide mit einander einschlieſsen: 1) für rechtwinklige Koordinaten, 2) für schiefwinklige Koordinaten (Koordinatenwinkel ω).

Beispiele.

a) $y=3x+5,\ y=7x-2;$

b) $3x+5y-1=0,\ 11x-2y+3=0;$

c) $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1,\ \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1;$

d) $x\cos 60^0+y\sin 60^0=5,\ x\cos 45^0+y\sin 45^0=11.$

e) $2y-7x+1=0,\ y=\frac{3}{2}x-3$ (Koordinatenwinkel 60^0).

110. Welchen Winkel schlieſsen die beiden Strahlen ein, welche in einem rechtwinkligen Koordinatensystem von den Punkten (x_1, y_1), (x_2, y_2) nach dem Koordinatenanfangspunkte gezogen sind?

Beispiel. $x_1=11,\ y_1=1,\ x_2=7,\ y_2=8.$

111. Die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks sind
$L_1x+M_1y+N_1=0$, $L_2x+M_2y+N_2=0$, $L_3x+M_3y+N_3=0$.
Wie groſs sind die Winkel des Dreiecks?

Beispiele.

a) $8y + x + 11 = 0$, $3y - 2x - 1 = 0$, $5y + 4x + 6 = 0$;

b) $2y + 5x - 29 = 0$, $y - 9x + 43 = 0$, $y + 14x - 49 = 0$.

112. Gegeben die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks. Welche Winkel schliefsen die Schwerpunktstransversalen desselben mit einander ein?

Beispiel.

$x_1 = 5$, $y_1 = -7$, $x_2 = 1$, $y_2 = 11$, $x_3 = -4$, $y_3 = 13$.

113. Die Gleichungen der Seiten eines Vierecks sind $2y - 3x + 4 = 0$, $3y + 8x - 69 = 0$, $2y - x + 11 = 0$, $3y + 4x - 11 = 0$. Wie grofs sind die Winkel desselben?

114. Die Koordinaten der Ecken eines Vierecks sind $x_1 = 2$, $y_1 = 3$, $x_2 = 7$, $y_2 = 5$, $x_3 = 9$, $y_3 = -3$, $x_4 = -1$, $y_4 = -2$. Unter welchem Winkel schneiden sich die Verbindungslinien der Halbierungspunkte je zweier gegenüberliegender Seiten?

115. Aus den Gleichungen der Seiten eines vollständigen Vierseits $y + 3x + 4 = 0$, $5y - 3x - 34 = 0$, $y - x - 4 = 0$, $y - 3x - 2 = 0$ sind die Winkel zu bestimmen, unter welchen die Diagonalen gegen einander geneigt sind.

116. Eine durch den Punkt (x_1, y_1) gezogene Gerade teile den Abstand der beiden Punkte (x_2, y_2) und (x_3, y_3) im Verhältnis m zu n. Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Geraden?

Beispiel.

$x_1 = 10$, $y_1 = 4$, $x_2 = 3$, $y_2 = 5$, $x_3 = 9$, $y_3 = 11$, $m = 2$, $n = 3$.

Parallele Gerade.

117. Unter welcher Bedingung laufen die beiden Geraden $L_1 x + M_1 y + N_1 = 0$ und $L_2 x + M_2 y + N_2 = 0$ einander parallel? Welche Form hat die Bedingungsgleichung, wenn die Gleichungen der Geraden $\frac{x}{p_1} + \frac{y}{q_1} = 1$ und $\frac{x}{p_2} + \frac{y}{q_2} = 1$ oder $y = A_1 x + b_1$ und $y = A_2 x + b_2$ sind?

118. Durch den Punkt $x_1 = 5$, $y_1 = 7$ ist zu der Geraden, deren Gleichung $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = -1$ ist, eine Parallele zu ziehen. Welches ist die Gleichung derselben?

119. Es ist die Gleichung einer Geraden zu bestimmen, die durch den Punkt (x_1, y_1) geht und der Strecke, welche die Punkte (x_2, y_2) und (x_3, y_3) verbindet, parallel läuft.

Beispiel.

$x_1 = 5,\ y_1 = 3,\ x_2 = -2,\ y_2 = 7,\ x_3 = -4,\ y_3 = -5.$

120. Zu der Geraden $4x + 5y + 11 = 0$ sollen in der Entfernung $p = 3$ Parallelen gezogen werden. Welches sind die Gleichungen derselben?

121. Gegeben seien drei Gerade: $L_1x + M_1y + N_1 = 0$, $L_2x + M_2y + N_2 = 0$, $L_3x + M_3y + N_3 = 0$. Welchen Wert mufs man k in der Gleichung $L_1x + M_1y + N_1 + k(L_2x + M_2y + N_2) = 0$ erteilen, wenn die derselben entsprechende Gerade der Geraden $L_3x + M_3y + N_3 = 0$ parallel laufen soll?

122. Welches ist die Gleichung einer Geraden, die durch den Schnittpunkt der Geraden $3x + 2y - 59 = 0$, $5x - 7y + 6 = 0$ geht und a) der X-Achse, b) der Geraden $y + 2x - 1 = 0$ parallel läuft?

123. Gegeben seien die Gleichungen von zwei parallelen Geraden $y = M_1x + n_1$, $y = M_1x + n_2$. Es soll die Gleichung einer dritten Geraden gesucht werden, welche durch den Punkt (x_1, y_1) geht und von den beiden Parallelen so geschnitten wird, dafs der Abschnitt zwischen denselben die Länge d hat.

Beispiel.

$3y + 4x - 12 = 0,\ 3y + 4x - 5 = 0,\ d = 3,\ x_1 = -2,\ y_1 = -7.$

Gerade Linien, welche sich rechtwinklig durchschneiden.

124. Welche Bedingung mufs erfüllt sein, wenn sich zwei Gerade rechtwinklig durchschneiden sollen? Die Gleichungen der beiden Geraden seien a) $L_1x + M_1y + N_1 = 0$, $L_2x + M_2y + N_2 = 0$; b) $y = A_1x + b_1$, $y = A_2x + b_2$.

125. Von dem Punkte (x_1, y_1) ist auf die Gerade $Lx + My + N = 0$ ein Lot zu fällen. Welches ist die Gleichung desselben?

Beispiele.

a) $y = 4x - 7,\ x_1 = 3,\ y_1 = -13;$

b) $7y + 23x - 5 = 0,\ x_1 = 2,\ y_1 = 9.$

126. Auf der Geraden $5x - 7y + 1 = 0$ ist in dem Punkte, dessen Abscisse gleich 11 ist, ein Lot zu errichten. Welches ist die Gleichung desselben?

127. Es ist die Gleichung einer Geraden zu bestimmen, welche die Strecke zwischen (x_1, y_1) und (x_2, y_2) unter rechtem Winkel im Verhältnis m zu n teilt.

Beispiel.

$x_1 = -3,\ y_1 = 7,\ x_2 = 5,\ y_2 = -4,\ m = 4,\ n = 7.$

128. In welchem Punkte schneidet das Lot, welches vom Punkte (x_1, y_1) auf die Gerade $y = Mx + n$ gefällt ist, die letztere? Welche Stücke schneidet dasselbe auf den Koordinatenachsen ab?

Beispiel. $y = \frac{4}{7}x + 3,\ x_1 = 5,\ y_1 = 9.$

129. Durch den Schnittpunkt der beiden Geraden $2x - 3y + 7 = 0$ und $5x - 4y - 3 = 0$ ist ein Lot auf die Gerade $y = \frac{7}{8}x + 2$ zu fällen. Welches ist die Gleichung desselben?

130. In dem Schnittpunkte der beiden Geraden $2x + 5y + 8 = 0$ und $3x - 4y - 7 = 0$ ist auf der letzteren ein Lot zu errichten. Welches ist die Gleichung desselben?

131. Von dem Punkte $x_1 = 4,\ y_1 = 5$ seien Lote auf die beiden Geraden $y - 2x - 7 = 0$ und $2y + 3x - 6 = 0$ gefällt. Welches ist der Inhalt des so entstandenen Vierecks?

132. Die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks sind:

$2y + x - 11 = 0,\ 2y - 9x + 59 = 0,\ 6y - 7x - 3 = 0.$

Welches sind die Gleichungen der Höhen desselben?

133. Aus den Koordinaten der Ecken eines Dreiecks sind die Gleichungen der Höhen desselben zu entwickeln.

Beispiel.

$x_1 = -1,\ y_1 = -1,\ x_2 = -3,\ y_2 = 5,\ x_3 = 7,\ y_3 = 11.$

134. Es ist zu zeigen, dafs sich die drei Höhen eines Dreiecks in einem Punkte durchschneiden. Welches ist der Schnittpunkt der Höhen des Dreiecks, von dem die Koordinaten der Ecken in der vorhergehenden Aufgabe gegeben sind?

135. Man verbinde den Punkt $x_1 = 5,\ y_1 = 2$ mit dem Schnittpunkte der Geraden $2y + x - 11 = 0$ und $2y - 9x + 59 = 0$ und errichte im Halbierungspunkte dieser Strecke ein Lot. Welches ist die Gleichung desselben?

136. Gegeben sind die Koordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks. Welches sind die Gleichungen der Lote, die sich in den Halbierungspunkten der Seiten errichten lassen?

Beispiel.

$x_1 = 5,\ y_1 = -7,\ x_2 = 1,\ y_2 = 11,\ x_3 = -4,\ y_3 = 13.$

137. Es ist zu zeigen, dafs sich die in den Halbierungspunkten der Seiten eines Dreiecks errichteten Lote in einem Punkte durchschneiden.

138. Die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks sind

$$y + x + 1 = 0,\ 5y + 3x + 11 = 0,\ 2y + x + 4 = 0.$$

Die Seiten seien halbiert und in den Halbierungspunkten Lote auf denselben errichtet. Welches sind die Koordinaten des Schnittpunktes der Lote? Wie weit ist der Schnittpunkt von jeder Ecke des Dreiecks entfernt?

139. Von dem Punkte (x_1, y_1) seien Lote auf die beiden Geraden $L_1x + M_1y + N_1 = 0$ und $L_2x + M_2y + N_2 = 0$ gefällt. Wie grofs ist der Winkel, den die beiden Lote mit einander einschliefsen?

140. Durch den Punkt (x_1, y_1) ist eine Gerade zu ziehen, welche mit der Geraden $L_1x + M_1y + N_1 = 0$ den Winkel α einschliefst.

Beispiele.

a) $3y - 2x + 7 = 0,\ x_1 = 3,\ y_1 = 5,\ \sphericalangle\,\alpha = 45^0.$

b) $5x + 11y - 1 = 0,\ x_1 = -2,\ y_1 = 6,\ \sphericalangle\,\alpha = 30^0.$

141. Durch den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$2x + 5y + 8 = 0,\ 3x - 4y - 7 = 0$$

ist eine gerade Linie zu ziehen, die mit der Geraden $y = 4x + 3$ einen Winkel von 60^0 einschliefst.

142. Die Koordinaten von zwei Eckpunkten eines Dreiecks sind gegeben $x_1 = 3,\ y_1 = 5,\ x_2 = 7,\ y_2 = -4$. An der ersten Ecke liege der Winkel $\alpha = 61^0\,50'\,15''$, an der zweiten der Winkel $\beta = 87^0\,23'\,50''$. Welches sind die Gleichungen der beiden Seiten, die diesen Winkeln gegenüberliegen?

Die Halbierungslinie eines Winkels.

143. Gegeben sind die Gleichungen zweier geraden Linien. Es sollen die Gleichungen der Halbierungslinien der Winkel gefunden werden, welche die beiden Geraden mit einander bilden. Die Gleichungen der Geraden seien

1) $x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 = 0,\ x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2 = 0.$
2) $L_1x + M_1y + N_1 = 0,\ L_2x + M_2y + N_2 = 0.$

Beispiele.

a) $y = \frac{3}{4}x - 7,\ y = \frac{4}{3}x + 17;$
b) $21x + 20y + 37 = 0,\ 30x - 16y + 19 = 0.$

144. Es ist zu zeigen, dafs die Halbierungslinien der Winkel zweier Geraden auf einander senkrecht stehen.

145. Die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks sind

$$6y - 8x - 43 = 0,\ 5y + 12x - 34 = 0,\ 4y + 3x + 13 = 0.$$

Es sind die Gleichungen der Halbierungslinien der Innenwinkel und der Aufsenwinkel derselben zu bestimmen.

146. Gegeben sind die Koordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks: $(0, 0)$, $(x_2, 0)$, (x_3, y_3). Welches sind die Gleichungen der Halbierungslinien der Dreieckswinkel?

147. Aus den Gleichungen der Seiten eines Dreiecks

$$3x + 7y - 23 = 0,\ 3x - 7y - 65 = 0,\ x - 7 + \sqrt{58} = 0$$

sind zu bestimmen 1) die Koordinaten des Punktes, in dem sich die Winkelhalbierenden durchschneiden, 2) der Abstand dieses Punktes von den Seiten des Dreiecks.

148. Aus den Koordinaten der Ecken eines Vierecks

$$x_1 = -3,\ y_1 = -2,\ x_2 = -1,\ y_2 = 6,\ x_3 = 10,\ y_3 = 9,$$
$$x_4 = 5,\ y_4 = -4$$

sind die Gleichungen der Geraden zu bestimmen, welche die Winkel der Diagonalen halbieren.

149. Die Koordinaten der Ecken eines regulären Sechsecks sind:

$$x_1 = 0,\ y_1 = s,\ x_2 = \frac{s}{2}\sqrt{3},\ y_2 = \frac{s}{2},\ x_3 = \frac{s}{2}\sqrt{3},\ y_3 = -\frac{s}{2},$$

$$x_4 = 0,\ y_4 = -s,\ x_5 = -\frac{s}{2}\sqrt{3},\ y_5 = -\frac{s}{2},\ x_6 = -\frac{s}{2}\sqrt{3},\ y_6 = \frac{s}{2}.$$

In welchem Punkte schneiden sich die Halbierungslinien der Winkel des Polygons?

Geometrische Oerter.

150. Den geometrischen Ort des Punktes zu bestimmen, welcher von der gegebenen Geraden $Lx + My + N = 0$ die Entfernung a hat.

151. Auf welcher Linie liegen die Halbierungspunkte aller Strahlen, welche sich von dem Punkte (x_1, y_1) nach der Verbindungslinie der Punkte (x_2, y_2) und (x_3, y_3) ziehen lassen?

Beispiel.

$$x_1 = -4,\ y_1 = -2,\ x_2 = 1,\ y_2 = 11,\ x_3 = 5,\ y_3 = 3.$$

152. Von dem Punkte (x_1, y_1) seien nach der Geraden

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0$$

Strahlen gezogen und jeder derselben im Verhältnis m zu n geteilt. Welches ist der geometrische Ort des Teilpunktes?

153. Es ist der geometrische Ort des Punktes zu bestimmen, welcher von zwei gegebenen Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) gleich weit entfernt ist.

154. Gegeben sind die Gleichungen zweier Geraden

$$y = M_1 x + n_1 \text{ und } y = M_2 x + n_2.$$

Man soll den geometrischen Ort desjenigen Punktes bestimmen, dessen Entfernungen von den gegebenen Geraden um die Strecke d verschieden sind.

155. Welches ist der geometrische Ort desjenigen Punktes, für den die Differenz der Quadrate seiner Entfernungen von den beiden Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) den Wert a^2 hat?

156. Zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels möge sich ein Punkt fortbewegen, so dafs die Summe seiner Abstände von den beiden Schenkeln gleich einer gegebenen Strecke s ist. Welchen Weg verfolgt der Punkt?

157. Gegeben seien die Gleichungen von n Geraden

$$\begin{gathered} x \cos\alpha_1 + y \sin\alpha_1 - p_1 = 0, \\ x \cos\alpha_2 + y \sin\alpha_2 - p_2 = 0, \\ \vdots \\ x \cos\alpha_n + y \sin\alpha_n - p_n = 0. \end{gathered}$$

Es soll der geometrische Ort des Punktes bestimmt werden, für welchen die Summe der Entfernungen von den gegebenen Geraden gleich der bekannten Strecke s ist.

158. Die Schenkel eines Winkels entsprechen den Gleichungen $L_1 x + M_1 y + N_1 = 0$, $L_2 x + M_2 y + N_2 = 0$. Zwischen denselben bewegt sich ein Punkt fort, dessen Entfernungen im Verhältnis m zu n stehen. Welche Linie beschreibt der Punkt?

159. Zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels seien Parallelen zu einer gegebenen Geraden gezogen und jede derselben im Verhältnis m zu n geteilt. In welcher Linie liegen die Teilpunkte?

160. Die Endpunkte der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mögen auf den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems fortgleiten. Welche Linie beschreibt der Scheitel des rechten Winkels?

161. Die rechtwinkligen Koordinaten des Scheitels eines rechten Winkels seien x_1, y_1. Man verbinde die Punkte, in denen der eine Schenkel die Y-Achse, der andere die X-Achse schneidet. Welche Linie beschreibt derjenige Punkt, welcher die Verbindungslinie jener Schnittpunkte im Verhältnis m zu n teilt, wenn der rechte Winkel um seinen Scheitel gedreht wird?

162. Vom Koordinatenanfangspunkte sind nach einer Geraden, deren Gleichung $y = Mx + n$ ist, Strahlen gezogen und über jedem dieser Strahlen ist ein gleichseitiges Dreieck konstruiert. Auf welcher Linie liegen die Spitzen dieser gleichseitigen Dreiecke?

163. Über einer gegebenen Strecke a als Basis sind Dreiecke konstruiert, von denen jedes den Umfang s besitzt. In jedem derselben ist die Höhe gezeichnet und über die Spitze hinaus verlängert bis zu einem Punkte, der von der Basis um die Länge der einen anstoſsenden Seite entfernt ist. In welcher Linie liegen die Endpunkte?

164. Über der Grundlinie a eines Dreiecks seien Rechtecke in dasselbe eingezeichnet. Welches ist der geometrische Ort des Schnittpunktes der Diagonalen?

165. In einem Dreieck sei parallel zur Basis eine Gerade gezogen und die Schnittpunkte in den Seiten seien mit den Endpunkten

der Basis verbunden. Welche Linie beschreibt der Schnittpunkt der Transversalen, wenn die Gerade so verschoben wird, dafs sie der Basis parallel bleibt?

166. In gleichen Abständen von der Basis eines Dreiecks seien auf den beiden anderen Seiten Lote errichtet. Welches ist der geometrische Ort des Schnittpunktes der Lote?

167. Gegeben sei ein Winkel α. Von einem Punkte P mögen Lote auf die Schenkel desselben gefällt sein. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P, wenn die Summe der Abschnitte, welche von den Loten auf den Schenkeln gebildet werden, gleich der gegebenen Strecke s sein soll?

168. Von einem Parallelogramm seien die Richtungen zweier aneinander stofsender Seiten und die Summe aller Seiten gegeben. Welches ist der geometrische Ort derjenigen Ecke des Parallelogramms, welche dem Schnittpunkt der Richtungslinien gegenüberliegt?

169. Gegeben ist der Winkel AOB. Von einem festen Punkte P werden zwei beliebige Strahlen gezogen, welche den Schenkel OA in L und M, den Schenkel OB in R und N durchschneiden mögen. Man verbinde R mit M und N mit L und bestimme den geometrischen Ort des Schnittpunktes dieser beiden Verbindungslinien.

Anmerkung. In den Aufgaben 170—177 liege das Dreieck ABC so, dafs die Seite AB mit der X-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems und A mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammenfällt. Die fünf merkwürdigen Punkte des Dreiecks sind der Schwerpunkt, der Höhenpunkt, der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises, der Schnittpunkt der Ecktransversalen, welche nach den Berührungspunkten der anbeschriebenen Kreise gezogen sind.

170. Welche Linien beschreiben die fünf merkwürdigen Punkte des Dreiecks ABC, wenn die Winkel konstant, die Längen der Seiten veränderlich sind?

171. Welches ist der geometrische Ort des Mittelpunktes des einbeschriebenen Kreises im Dreieck ABC, wenn die Seite a und der gegenüberliegende Winkel A konstant, die übrigen Stücke veränderlich sind?

172. Welche Linie beschreibt der Höhenpunkt des Dreiecks ABC, wenn die Seite b und der Winkel B konstant, die übrigen Stücke veränderlich sind?

173. Welche Linien beschreiben der Höhenpunkt, der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, der Schwerpunkt und der fünfte merkwürdige Punkt des Dreiecks ABC, wenn die Seite a und der anliegende Winkel B konstant, die übrigen Stücke veränderlich sind?

174. Die geometrischen Örter der vier ersten merkwürdigen Punkte des Dreiecks ABC sind anzugeben, wenn die Seite b und der Winkel A konstant, die übrigen Stücke veränderlich sind.

175. Welche Linien beschreiben die Mittelpunkte des umschriebenen und des einbeschriebenen Kreises des Dreiecks ABC, wenn nur die Seite b und der Winkel C konstante Werte haben?

176. Die geometrischen Örter der vier ersten merkwürdigen Punkte des Dreiecks ABC anzugeben, wenn die Seite c und der Winkel A konstant, die übrigen Stücke veränderlich sind.

177. Welches ist der geometrische Ort des Schwerpunktes, wenn die Grundlinie c konstant ist und fest liegt, dagegen die gegenüberliegende Spitze C sich auf der Geraden $y = Mx + n$ fortbewegt?

178. Von einem Dreieck ist ein Winkel α und die Summe der ihn einschließenden Seiten (s) gegeben. Es soll der geometrische Ort desjenigen Punktes gesucht werden, der die dritte Seite im Verhältnis m zu n teilt.

Vermischte Aufgaben.

179. Gegeben ist der Winkel α. Durch den Punkt (x_1, y_1) soll eine Gerade gezogen werden, so daſs das zwischen den Schenkeln des Winkels liegende Stück eine Gröſse a hat. Die Gleichung der Geraden ist zu bestimmen.

180. Zwischen den beiden Geraden, deren Gleichungen

$$4y - 3x - 26 = 0 \text{ und } 6y - 7x - 44 = 0$$

sind, ist eine Strecke $d = 32{,}5$ so einzutragen, daſs sie der Geraden $12y + 5x - 79 = 0$ parallel läuft. Welches wird die Gleichung der einzutragenden Strecke sein?

181. Auf der Geraden $4y - 5x + 28 = 0$ soll ein Punkt

bestimmt werden, der von den beiden Punkten $x_1 = 1$, $y_1 = 5$, und $x_2 = 7$, $y_2 = -3$ gleich weit entfernt ist.

182. Auf der Geraden $y - x - 5 = 0$ sei eine Strecke abgeschnitten, deren Endpunkte die Abscissen $x_1 = 2$, $x_2 = 5$ besitzen, auf der Geraden $5y + 4x - 11 = 0$ eine Strecke, deren Endpunkte durch die Abscissen $x_3 = 4$, $x_4 = 9$ bestimmt sind. Über jeder dieser Strecken sei ein gleichschenkliges Dreieck konstruiert, so dafs die Spitzen zusammenfallen. Welches sind die Koordinaten der gemeinschaftlichen Spitze?

183. Es sind die Koordinaten desjenigen Punktes zu bestimmen, der von den beiden Punkten

$$x_1 = 4,\ y_1 = -3,\ x_2 = 7,\ y_2 = -1$$

gleich weit entfernt ist und zugleich von der Geraden $\frac{y}{8} + \frac{x}{15} = 1$ die Entfernung $d = 3$ besitzt.

184. Durch den Punkt (x_1, y_1) soll eine Gerade gezogen werden und zwar so, dafs die Entfernungen des Punktes (x_2, y_2) und des Punktes (x_3, y_3) von derselben sich wie m zu n verhalten.

185. Gegeben ist ein Winkel und zwischen den Schenkeln desselben ein Punkt P. Durch den Punkt ist eine Gerade zu legen, so dafs die Strecke zwischen beiden Schenkeln in dem gegebenen Punkte P halbiert wird. Welches ist die Gleichung der Geraden?

186. Durch den Punkt $x_1 = 7$, $y_1 = 10$ ist eine Gerade zu ziehen, die von den aus den Punkten $x_2 = 1{,}5$, $y_2 = 9$, $x_3 = 9$, $y_3 = 15\frac{2}{3}$ auf sie gefällten Loten begrenzt und im ersten Punkte halbiert wird. Welches ist die Gleichung dieser Geraden?

187. Welches ist die Gleichung einer von dem Punkte (x_1, y_1) aus gezogenen Geraden, deren Abstände von den Punkten (x_2, y_2) und (x_3, y_3) eine Differenz gleich d haben?

188. Die Strecke zwischen den beiden Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) möge in dem Punkte (x_3, y_3) stetig geteilt sein. Welche Beziehungen finden dann zwischen den Koordinaten der Punkte statt?

189. Die Strecke zwischen den beiden Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) möge in den Punkten (x_3, y_3) und (x_4, y_4) harmonisch geteilt sein. Welche Beziehungen lassen sich dann zwischen den Koordinaten der vier harmonischen Punkte aufstellen?

190. Es ist zu zeigen, dafs der Höhenpunkt, der Schwerpunkt und der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises eines Dreiecks in einer geraden Linie liegen. In welchem Verhältnis teilt der Schwerpunkt die Strecke zwischen dem Höhenpunkte und dem Mittelpunkte des umschriebenen Kreises?

191. Wie kann man nachweisen, dafs in einem Dreieck der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises, der Schwerpunkt und der fünfte merkwürdige Punkt in einer Geraden liegen? In welchem Verhältnis teilt der Schwerpunkt die Strecke zwischen den beiden andern Punkten?

192. Die Gleichungen der Seiten eines vollständigen Vierseits sind

$$\frac{y}{7}+\frac{x}{2}=1,\quad -\frac{y}{1}+\frac{x}{2}=1,\quad -\frac{y}{1}-\frac{x}{4}=1,\quad \frac{y}{7}-\frac{x}{4}=1.$$

Es ist nachzuweisen, dafs die Halbierungspunkte der Diagonalen desselben in einer geraden Linie liegen.

193. Auf der Geraden, deren Gleichung $y-2x+5=0$ ist, soll ein Punkt bestimmt werden, so dafs die von den Punkten $x_1=17$, $y_1=13$, $x_2=9$, $y_2=3$ nach demselben gezogenen Strahlen gleiche Winkel mit der Geraden einschliefsen.

194. Die Grundlinie eines Dreiecks liegt auf einer Geraden, deren Gleichung $55y+18x-256=0$ ist. Die Endpunkte derselben sind durch ihre Abscissen $x_1=2$, $x_2=7{,}5$ bestimmt. Aus den Koordinaten des Schwerpunkts $x'=5$, $y'=6$ sollen die übrigen Stücke des Dreiecks gefunden werden.

195. Auf der Geraden $15y-8x-6=0$ ist eine Strecke abgeschnitten, deren Endpunkte die Abscissen $x_1=3$, $x_2=18$ haben, und über dieser Strecke ein gleichseitiges Dreieck konstruiert. Welches sind die Koordinaten der dritten Ecke des Dreiecks?

196. Durch den Punkt $x_1=5$, $y_1=3$ sollen gerade Linien gezogen werden, von denen jede mit den beiden sich schneidenden Geraden $9x+40y-123=0$, $21x-20y-29=0$ ein gleichschenkliges Dreieck einschliefst. Welches sind die Gleichungen der gesuchten Geraden?

197. Die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks sind $x_1=5$, $y_1=2$, $x_2=4$, $y_2=-7$, $x_3=3$, $y_3=7$. Die erste Seite

desselben möge im Verhältnis 4 : 7 geteilt und durch den Teilungspunkt eine Parallele zur zweiten Seite gezogen werden. Welches ist die Gleichung der Parallelen? Welche Winkel schliefst dieselbe mit den geschnittenen Seiten ein?

198. Gegeben ist der Winkel α durch die Richtung seiner Schenkel und der Punkt P. Durch den letzteren ist eine Gerade zu ziehen, so dafs der Abschnitt derselben zwischen den beiden Schenkeln gleich dem auf einem Schenkel wird.

199. Die Gleichungen der drei Seiten eines Dreiecks sind

$$2x - 3y + 16\tfrac{1}{2} = 0,\ 15x + 8y - 1 = 0,\ 7x - 24y - 9 = 0.$$

Es sollen die Koordinaten eines Punktes auf der ersten Seite gefunden werden, der von den beiden anderen Seiten gleich weit entfernt ist.

200. Die Gleichungen der drei Seiten eines Dreiecks sind

$$y = 0,\ 3y - 4x = 0,\ y + \tfrac{3}{2}x - 5 = 0.$$

Zu der ersten ist eine Parallele zu ziehen, so dafs diese letztere gleich dem unteren Abschnitte der zweiten Seite ist.

201. Die Koordinaten der Fufspunkte der Höhen eines Dreiecks sind

$$x_1 = 5,\ y_1 = 3,\ x_2 = 7\tfrac{4}{17},\ y_2 = 3\tfrac{1}{17},\ x_3 = 3\tfrac{12}{17},\ y_3 = 4\tfrac{14}{17}.$$

Welches sind die Gleichungen der Höhen? Welches die Gleichungen der Seiten des Dreiecks?

202. Von dem Dreieck ABC falle die Seite AB mit der X-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, der Punkt A mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammen. Man ziehe den Radius des umschriebenen Kreises durch A und verbinde die Fufspunkte der Höhen auf AC und AB. Unter welchem Winkel schneiden sich diese beiden Linien?

203. Gegeben sind die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks. Es sollen die Gleichungen der Seiten eines Sechsecks gefunden werden, welches von den in den Eckpunkten auf den Seiten errichteten Loten gebildet wird.

204. Die Gleichungen der Seiten eines Rhombus sind

$$3y - 8x + 9 = 0,\ 3y + 8x - 87 = 0,\ 3y - 8x + 57 = 0,$$
$$3y + 8x - 39 = 0.$$

Es sollen die Koordinaten desjenigen Punktes, der gleich weit von den Seiten desselben entfernt ist, und der Abstand selbst gefunden werden.

205. Die Gleichungen der Seiten eines Vierecks sind

$$5y - 2x - 11 = 0,\ \ y + 4x - 33 = 0,\ \ 10y + x + 21 = 0,$$
$$3y - 5x + 1 = 0.$$

Man verbinde die Halbierungspunkte der Seiten und halbiere die Winkel des so entstandenen Vierecks. Welches sind die Gleichungen der Halbierungslinien?

Gleichungen höheren Grades, welchen Systeme von geraden Linien entsprechen.

206. Wie läſst sich nachweisen, daſs der homogenen Gleichung n-ten Grades zwischen x und y

$$x^n - ax^{n-1}y + bx^{n-2}y^2 - \ldots\ldots \mp pxy^{n-1} \pm qy^n = 0$$

n gerade Linien entsprechen, welche durch den Koordinatenanfangspunkt gehen?

207. Wie liegen die geraden Linien, welche der Gleichung

$$y^2 - ayx + bx^2 = 0$$

entsprechen?

208. Welche geraden Linien werden durch die Gleichung $x^2 - y^2 = 0$ dargestellt?

209. Es sollen die geraden Linien gefunden werden, deren Gleichung $y^2 + 5xy - 14x^2 = 0$ ist.

210. Welche geraden Linien entsprechen der Gleichung

$$y^2 - 2yx + 3x^2 = 0?$$

211. Welches ist die geometrische Bedeutung der Gleichung

$$2y^3 - 11y^2x + 4yx^2 + 5x^3 = 0?$$

212. In welchen Punkten wird die Gerade $3x + 4y - 5 = 0$ von den Geraden geschnitten, welche der Gleichung

$$3y^3 - 22y^2x + 5yx^2 + 14x^3 = 0$$

entsprechen?

213. Durch den Punkt $x_1 = 7$, $y_1 = -9$ sollen Parallelen zu den Geraden gezogen werden, welche der Gleichung

$$15x^2 + 49xy - 22y^2 = 0$$

entsprechen. Welches sind die Gleichungen derselben?

214. Von dem Punkte $x_1 = 3$, $y_1 = 4$ sollen auf die Geraden, welche die Gleichung $6y^2 - 17xy + 5x^2 = 0$ darstellt, Lote gefällt werden. Wie lang sind dieselben? Wie groſs ist der Inhalt des Vierecks, welches von den gegebenen Geraden und den Loten eingeschlossen wird?

215. Welches ist die Tangente des Winkels, den die Geraden, welche der Gleichung $Ly^2 + Mxy + Nx^2 = 0$ entsprechen, einschlieſsen? Welche Relation besteht zwischen den Konstanten der Gleichung, wenn die beiden Geraden auf einander lotrecht stehen?

216. Durch die Gleichung $3y^2 + 13xy - 10x^2 = 0$ werden zwei Gerade dargestellt. Wie groſs ist der Winkel, den beide einschlieſsen?

217. Bestimme den Winkel, unter dem sich die Geraden schneiden, welche der Gleichung $4y^2 - 15xy - 4x^2 = 0$ entsprechen.

218. Gegeben ist die Gleichung zweier Geraden
$$Ly^2 + Mxy + Nx^2 = 0.$$
Es sollen die Gleichungen derjenigen beiden Geraden bestimmt werden, welche die Winkel der gegebenen Geraden halbieren.

219. Gegeben ist die Gleichung $3y^2 + 13xy - 10x^2 = 0$, der zwei gerade Linien entsprechen. Welches sind die Gleichungen der Winkelhalbierenden?

220. Gegeben ist die Gleichung $y^2 - 2yx + 3x^2 = 0$. Es sollen die Gleichungen derjenigen Geraden bestimmt werden, welche die Winkel der beiden Geraden, die der gegebenen Gleichung entsprechen, halbieren.

221. Die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks liege im Koordinatenanfangspunkte, seine Schenkel mögen der Gleichung
$$10y^2 - 41xy + 21x^2 = 0$$
entsprechen. Welche Richtung kann die Grundlinie desselben haben?

222. Welcher Bedingung müssen die Konstanten der Gleichung
$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$
genügen, wenn derselben zwei gerade Linien entsprechen sollen?

223. Entsprechen der Gleichung
$$2y^2 - xy - 15x^2 - 13y - 27x + 6 = 0$$
zwei gerade Linien? Welches sind die Gleichungen derselben?

224. Entsprechen der Gleichung

$$28x^2 + xy - 2y^2 - 11x - y + 1 = 0$$

zwei gerade Linien? Welches sind die Gleichungen derselben?

225. Welchen Wert mufs man der unbekannten Konstanten B in der Relation

$$y^2 + Bxy + 2x^2 + y + x - 6 = 0$$

erteilen, damit dieser Gleichung zwei gerade Linien entsprechen?

226. Wie viel Bedingungsgleichungen müssen die Konstanten der Gleichung dritten Grades

$$Ay^3 + By^2x + Cyx^2 + Dx^3 + Ey^2 + Fxy + Gx^2 + Hy + Kx + 1 = 0$$

Genüge leisten, wenn dieselbe drei gerade Linien repräsentieren soll?

227. Werden durch die Gleichung

$$8y^3 - 18y^2x + 7yx^2 + 3x^3 + 10y^2 - 8yx - 7x^2 + y + 5x - 1 = 0$$

gerade Linien dargestellt? Welches sind die Gleichungen derselben?

228. Wie viel Bedingungsgleichungen müssen die Konstanten der Gleichung

$$y^4 + Ay^3x + By^2x^2 + Cyx^3 + Dx^4 + Fy^3 + Gy^2x + Hyx^2 + Kx^3 + Ly^2 + Myx + Nx^2 + Py + Qx + R = 0$$

genügen, wenn dieselbe vier parallele Gerade repräsentieren soll?

Das Strahlenbüschel. (Abgekürzte Bezeichnung.)

229. Welches ist die geometrische Bedeutung der Gröfse k in der Gleichung

$$x \cos \varphi_1 + y \sin \varphi_1 - p_1 - k(x \cos \varphi_2 + y \sin \varphi_2 - p_2) = 0?$$

230. Welches ist die geometrische Bedeutung der Gröfse k in der Gleichung

$$L_1x + M_1y + N_1 - k(L_2x + M_2y + N_2) = 0?$$

Anmerkung. In den folgenden Aufgaben ist die Gleichung $x \cos \varphi_n + y \sin \varphi_n - p_n = 0$ kurz durch $V_n = 0$ bezeichnet. Erteilt man k in der Gleichung $V_1 - kV_2 = 0$ alle möglichen positiven und negativen reellen Werte, so entspricht der Gleichung ein Strahlenbüschel, d. i. ein System von Geraden, welche alle durch den Schnittpunkt der Fundamentalgeraden $V_1 = 0$, $V_2 = 0$ gehen. Die Gröſse k wird der Parameter des Büschels genannt.

231. Gegeben sind die beiden Geraden $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, welche den Winkel α einschlieſsen. Im Schnittpunkte ist auf jeder dieser beiden Geraden ein Lot errichtet. Welches sind die Gleichungen der Lote?

232. Die Gleichungen zweier Geraden sind $V_1 = 0$, $V_2 = 0$. In welcher Beziehung stehen die beiden Geraden $V_1 - kV_2 = 0$ und $V_1 + kV_2 = 0$ zu den Fundamentallinien?

233. Gegeben sind die Gleichungen zweier Geraden $V_1 = 0$, $V_2 = 0$. Was läſst sich über die Lage der beiden Geraden bestimmen, deren Gleichungen $V_1 - kV_2 = 0$ und $kV_1 - V_2 = 0$ sind?

234. $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$ sind die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks, α_1, α_2, α_3 die Winkel desselben. Welches sind die Gleichungen der Transversalen, welche die Eckpunkte mit den Halbierungspunkten der Gegenseiten verbinden? Wie läſst sich nachweisen, daſs diese Transversalen durch einen Punkt gehen?

235. Aus den Gleichungen der Seiten eines Dreiecks $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$ und den Winkeln α_1, α_2, α_3 sind die Gleichungen der Höhen zu ermitteln. Ferner ist zu zeigen, daſs die Höhen sich in einem Punkte schneiden.

236. In einem Dreieck, dessen Seiten den Gleichungen $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$ entsprechen, sind die Innenwinkel und die Auſsenwinkel halbiert. Welches sind die Gleichungen der Halbierungslinien? Was läſst sich über die gegenseitige Lage dieser Halbierungslinien bestimmen?

237. Von den Ecken eines Dreiecks, dessen Seiten den Gleichungen $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$ entsprechen, sind Transversalen nach den Berührungspunkten der anbeschriebenen Kreise gezogen. Welches sind die Gleichungen derselben? Wie läſst sich nachweisen, daſs sich dieselben in einem Punkte schneiden?

238. Es ist zu zeigen, daſs die Ecktransversalen eines Dreiecks nach den Berührungspunkten des einbeschriebenen Kreises gezogen, sich in einem Punkte schneiden. Die Gleichungen der Seiten des Dreiecks sind $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$.

239. Gegeben ist die Gleichung eines Strahlenbüschels

$V_1 + k V_2 = 0$. In dem Büschel mögen die beiden Strahlen, deren Gleichungen $V_1 + k_1 V_2 = 0$, $V_1 + k_2 V_2 = 0$ sind, als Fundamentalstrahlen betrachtet werden. Welcher Wert ist dann dem Parameter h in der Gleichung $V_1 + k_1 V_2 + h(V_1 + k_2 V_2) = 0$ zu erteilen, damit dieselbe gleichbedeutend sei mit der Gleichung eines bestimmten Strahles $V_1 + r V_2 = 0$?

240. Gegeben ein Strahlenbüschel, dessen Gleichung

$$5x - 7y + 3 + k(2x + 3y - 1) = 0$$

ist. Die beiden Geraden $7x - 4y + 2 = 0$, $19x + 14y - 4 = 0$ mögen als Fundamentalstrahlen desselben angesehen werden. Wie entwickelt man dann mit Hilfe derselben die Gleichung der Geraden $3x - 10y + 4 = 0$?

Das Doppelverhältnis von vier Strahlen.

Erklärung. Die allgemeine Gleichung einer Geraden werde kurz durch $L_n = 0$ bezeichnet. Sind

$$L_1 = 0, \quad L_1 + k_1 L_2 = 0,$$
$$L_2 = 0, \quad L_1 + k_2 L_2 = 0,$$

die Gleichungen von 4 Strahlen eines Büschels und werden die Strahlen, welche je zwei unter einander stehenden Gleichungen entsprechen, als zugeordnete betrachtet, so wird der Quotient $\frac{k_1}{k_2}$ das Doppelverhältnis der vier Strahlen genannt.

241. Gegeben sind drei Strahlen eines Büschels $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_1 + k L_2 = 0$. Welches mufs die Gleichung eines vierten Strahles sein, der dem dritten zugeordnet ist, wenn der Wert des Doppelverhältnisses gleich f sein soll?

Beispiel. $L_1 \equiv 11x - 2y + 7 = 0$,

$$L_2 \equiv 3x + 5y - 6 = 0,$$
$$L_1 + k_1 L_2 \equiv 2x - 17y + 25 = 0.$$
$$f = \tfrac{9}{8}.$$

242. Von einem Strahlenbüschel sind vier Gerade gegeben

$$L_1 + k_1 L_2 = 0, \qquad L_1 + h_1 L_2 = 0,$$
$$L_1 + k_2 L_2 = 0, \qquad L_1 + h_2 L_2 = 0.$$

Welchen Wert hat das Doppelverhältnis dieser vier Strahlen?

Zugeordnet sind die Strahlen, welche je zwei unter einander stehenden Gleichungen entsprechen.

243. Die Gleichung eines Strahlenbüschels ist

$$5x - 7y + 3 + k(2x + 3y - 1) = 0.$$

Welchen Wert hat das Doppelverhältnis von vier Strahlen dieses Büschels, deren Gleichungen

$$\begin{cases} 11x + 2y = 0, \\ x - 13y + 5 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x - 4y + 2 = 0, \\ 15x + 8y - 2 = 0 \end{cases}$$

sind?

244. Es ist zu zeigen, dafs der Wert des Doppelverhältnisses $(k_1 k_2;\ h_1 h_2)$ unverändert bleibt, wenn man bei gleich bleibender cyklischen Folge mit dem dritten Gliede beginnt, oder bei umgekehrter cyklischen Folge das zweite oder vierte Glied an die Spitze stellt. Welcher Satz folgt daraus für die Strahlen des Büschels?

245. Welchen Wert nimmt das Doppelverhältnis von vier Strahlen $(k_1 k_2;\ h_1 h_2)$ an, wenn man die Strahlen eines einzigen Paares mit einander vertauscht?

246. Welchen Wert nimmt das Doppelverhältnis von vier Strahlen $(k_1 k_2;\ h_1 h_2)$ an, wenn man den ersten Strahl des einen Paares mit dem zweiten des andern Paares vertauscht?

247. Der Wert des Doppelverhältnisses von 4 Strahlen $(k_1 k_2;\ h_1 h_2)$ ist gleich f. Welchen Wert nimmt dasselbe an, wenn die ersten Strahlen der beiden Paare, oder wenn die zweiten Strahlen beider Paare mit einander vertauscht werden?

248. Permutiert man die Glieder des Symbols $(k_1 k_2;\ h_1 h_2)$, so ergeben sich 24 verschiedene Formen. Wie viele verschiedene Werte können indessen die Doppelverhältnisse von 4 Strahlen nur besitzen?

Harmonische Strahlenbüschel.

Erklärung. Hat das Doppelverhältnis von vier durch einen Punkt gehenden Geraden den Wert -1, so wird das Büschel ein harmonisches genannt.

249. Es ist zu zeigen, dafs die Schenkel eines Winkels $V_1 = 0$, $V_2 = 0$ mit der Halbierungslinie desselben und der des Nebenwinkels ein harmonisches Strahlenbüschel bilden.

250. Wie läfst sich nachweisen, dafs die Halbierungslinie eines Dreieckswinkels im Mittelpunkte des einbeschriebenen Kreises und im Mittelpunkte des der Gegenseite anbeschriebenen Kreises harmonisch geteilt wird?

251. Welche Bedingungsgleichung mufs erfüllt sein, wenn die vier Strahlen

$$\begin{cases} L_1 + k_1 L_2 = 0, \\ L_1 + k_2 L_2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} L_1 + h_1 L_2 = 0, \\ L_1 + h_2 L_2 = 0 \end{cases}$$

ein harmonisches Büschel bilden sollen?

252. Wie gestaltet sich das Büschel in der vorhergehenden Aufgabe, wenn $h_1 = k_1$ gesetzt wird?

253. Gegeben sind zwei Geradenpaare

$$\begin{cases} 3y + 4x - 25 = 0, \\ 2y - 3x - 11 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 7y - 2x - 47 = 0, \\ -y + 10x - 3 = 0. \end{cases}$$

Es soll untersucht werden, ob dieselben ein harmonisches Strahlenbüschel bilden?

254. Es sind die Gleichungen von drei Geraden gegeben, die sich in einem Punkte schneiden, nämlich

$$L_1 - kL_2 = 0, \; L_1 + kL_2 = 0, \; L_1 - hL_2 = 0.$$

Welches ist die der letzten Geraden konjugierte Harmonikale?

255. Die Gleichungen von drei Geraden, welche durch einen Punkt gehen, sind

$$L_1 + k_1 L_2 = 0, \; L_1 + k_2 L_2 = 0, \; L_1 + k_3 L_2 = 0.$$

Es ist die Gleichung einer Geraden zu bestimmen, welche mit diesen gegebenen Geraden ein harmonisches Büschel bildet.

256. Welche geraden Linien bilden mit den drei Geraden

$$2x + 5y - 8 = 0, \; 5x + y - 16 = 0, \; 3x - 4y - 8 = 0,$$

die durch einen Punkt gehen, je ein harmonisches Strahlenbüschel?

257. Die Gleichungen der Fundamentallinien eines Büschels sind $2x + 3y - 5 = 0$, $7x - 2y + 1 = 0$. Drei Strahlen, welche zu diesem Büschel gehören, entsprechen den Gleichungen $-33x + 13y - 10 = 0$, $23x - 3y - 2 = 0$, $9x + y - 4 = 0$. Welches sind die Gleichungen der Geraden, die mit diesen gegebenen Strahlen harmonische Büschel bilden?

258. In einem Dreieck, dessen Seiten den Gleichungen $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$ entsprechen, sind die Schwerpunktstransversalen konstruiert. Es ist zu jeder derselben die zugeordnete Harmonikale zu bestimmen, wenn die beiden Seiten, durch deren Schnittpunkt sie geht, als konjugierte Strahlen betrachtet werden. Ferner sollen die Gleichungen der Geraden gefunden werden, welche mit den drei Schwerpunktstransversalen harmonische Strahlenbüschel bilden.

259. Die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks sind $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$. Welches sind die Gleichungen der geraden Linien, welche mit den Höhen des Dreiecks harmonische Strahlenbüschel bilden?

260. Von den Ecken eines Dreiecks, dessen Seiten den Gleichungen $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$ entsprechen, sind Transversalen nach den Berührungspunkten der änbeschriebenen Kreise gezogen. Welche geraden Linien bilden mit diesen drei Transversalen harmonische Strahlenbüschel?

261. Gegeben ist ein Strahlenpaar, welches den Gleichungen

$$L_1 + k_1 L_2 = 0, \ \ L_1 + k_2 L_2 = 0$$

entspricht. Wie viele Strahlenpaare lassen sich konstruieren, von denen jedes mit dem gegebenen ein harmonisches Strahlenbüschel bildet?

262. Zwei Strahlenpaare sind durch ihre Gleichungen

$$\begin{cases} L_1 + k_1 L_2 = 0, \\ L_1 + k_2 L_2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} L_1 + r_1 L_2 = 0, \\ L_1 + r_2 L_2 = 0 \end{cases}$$

gegeben. Es soll ein Strahlenpaar gefunden werden, welches mit jedem der gegebenen Strahlenpaare ein harmonisches Büschel bildet.

263. Welches sind die Gleichungen des Strahlenpaares, das mit jedem der beiden Strahlenpaare

$$\begin{cases} 2y - x - 11 = 0, \\ 2y - 3x - 5 = 0, \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} 2y + 3x - 23 = 0, \\ y + x - 10 = 0, \end{cases}$$

ein harmonisches Strahlenbüschel bildet?

264. Es sollen die Gleichungen desjenigen Strahlenpaares bestimmt werden, welches mit jedem der beiden Strahlenpaare

$$\begin{cases} 2y + 3x - 5 = 0, \\ 7y - 11x + 3 = 0, \end{cases} \text{ und } \begin{cases} -12y + 25x - 11 = 0, \\ 37y - 52x + 10 = 0 \end{cases}$$

ein harmonisches Strahlenbüschel bildet.

Involutorische Strahlenbüschel.

Erklärung. Drei Strahlenpaare, welche durch einen Punkt gehen, bilden ein involutorisches Büschel, wenn sich ein viertes Strahlenpaar bestimmen läfst, welches jedem der gegebenen harmonisch ist.

265. Gegeben sind drei Strahlenpaare

$$\begin{cases} L_1 + h_1 L_2 = 0, \\ L_1 + h_2 L_2 = 0, \end{cases} \begin{cases} L_1 + h_3 L_2 = 0, \\ L_1 + h_4 L_2 = 0, \end{cases} \begin{cases} L_1 + h_5 L_2 = 0, \\ L_1 + h_6 L_2 = 0. \end{cases}$$

Welcher Bedingungsgleichung müssen die Parameter $h_1, h_2, h_3 \ldots$ genügen, wenn diese Strahlenpaare sich in Involution befinden sollen?

266. Zu dem Strahlenbüschel

$$5x - 3y + 2 + h(x + 2y - 1) = 0$$

gehören die drei Strahlenpaare

$$\begin{cases} 8x+3y-1=0, \\ 4x-5y+3=0, \end{cases} \begin{cases} 10x+7y-3=0, \\ 7x+y=0, \end{cases} \begin{cases} 6x-y+1=0, \\ 8{,}5x+4y-1{,}5=0. \end{cases}$$

Es ist nachzuweisen, dafs diese Strahlenpaare ein involutorisches Büschel bilden.

267. Drei Strahlenpaare, deren Gleichungen

$$\begin{cases} L_1 = 0, \\ L_2 = 0, \end{cases} \begin{cases} L_1 + f_1 L_2 = 0, \\ L_1 + f_2 L_2 = 0, \end{cases} \begin{cases} L_1 + r_1 L_2 = 0, \\ L_1 + r_2 L_2 = 0 \end{cases}$$

sind, bilden eine Involution. Welcher Relation müssen dann die Parameter genügen?

268. Gegeben sind die Gleichungen von 3 Strahlenpaaren, welche durch einen Punkt gehen,

$$\begin{cases} 5x+y-11=0, \\ 3x-2y+1=0, \end{cases} \begin{cases} 14x-5y-8=0, \\ 29x-15y-3=0, \end{cases} \begin{cases} 17x-7y-7=0, \\ 23x-11y-5=0. \end{cases}$$

Bilden diese ein involutorisches Strahlenbüschel?

269. Eine Involution ist bestimmt durch die Gleichung

$$k_1 k_2 - 4(k_1 + k_2) + 7 = 0,$$

worin k_1 und k_2 Parameter zugeordneter Strahlen sind.

Es sollen die Gleichungen von drei involutorischen Strahlenpaaren entwickelt werden, wenn die Gleichung des Büschels

$$2x - 4y + 3 + k(5x + y - 1) = 0$$

ist. Es sei $k_1 = 5$, $k_1' = 3$, $k_1'' = -2$.

270. Es ist nachzuweisen, dafs in einem involutorischen Strahlenbüschel einem Strahl nur ein bestimmter zweiter Strahl und umgekehrt dem letzteren Strahl nur der erste entspricht.

271. Von einem involutorischen Strahlenbüschel sind zwei Strahlenpaare

$$\begin{cases} L_1 + k_1 L_2 = 0, \\ L_1 + k_2 L_2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} L_1 + h_1 L_2 = 0, \\ L_1 + h_2 L_2 = 0 \end{cases}$$

und ein einzelner Strahl $L_1 + r_1 L_2 = 0$ gegeben. Welches ist die Gleichung desjenigen Strahles, der dem letzten Strahl entspricht?

272. Zwei Strahlenpaare eines involutorischen Büschels besitzen die Gleichungen

$$\begin{cases} 11x - 2y + 7 = 0, \\ 4x + 5y + 3 \ \ = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 21x + 10{,}5y + 14{,}5 = 0, \\ 27x + 18y + 19 = 0. \end{cases}$$

Welcher Strahl des Büschels entspricht dann der Geraden

$$19x + 8y + 13 = 0?$$

273. Von einem involutorischen Strahlenbüschel sind drei Strahlenpaare gegeben, nämlich

$$\begin{cases} 5x + y - 11 = 0, \\ 3x - 2y + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 14x - 5y - 8 \ = 0, \\ 29x - 15y - 3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 17x - 7y - 7 \ = 0, \\ 23x - 11y - 5 = 0. \end{cases}$$

Welches sind die Gleichungen derjenigen beiden Strahlen, die mit jedem der gegebenen Paare ein harmonisches Büschel bilden?

Erklärung. Fallen in einem involutorischen Strahlenbüschel zwei entsprechende Strahlen zusammen, so bilden dieselben einen Doppelstrahl der Involution.

274. Wie viele Doppelstrahlen können in einem involutorischen Strahlenbüschel vorkommen? Welche Lage haben diese Doppelstrahlen zu denjenigen beiden Strahlen, die mit jedem Strahlenpaare der Involution ein harmonisches Büschel bilden?

275. Von einem involutorischen Strahlenbüschel sind die beiden Strahlenpaare

$$\begin{cases} L_1 + k_1 L_2 = 0, \\ L_1 + k_2 L_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} L_1 + h_1 L_2 = 0, \\ L_1 + h_2 L_2 = 0 \end{cases}$$

gegeben. Wie bestimmt man die Parameter der Doppelstrahlen der Involution?

276. Von dem Strahlenbüschel

$$5x - 3y + 2 + h(x + 2y - 1) = 0$$

sind zwei Strahlenpaare einer Involution gegeben, nämlich

$$\begin{cases} 8x + 3y - 1 = 0, \\ 4x - 5y + 3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 10x + 7y - 3 = 0, \\ 7x + y = 0. \end{cases}$$

Welches sind die Gleichungen der Doppelstrahlen der Involution?

277. Von einem involutorischen Strahlenbüschel sind die beiden Strahlenpaare

$$\begin{cases} 11x - 2y + 7 = 0, \\ 4x + 5y + 3 \quad = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 19x + 8y + 13 \quad = 0, \\ 31x + 23y + 22 = 0 \end{cases}$$

gegeben. Welches sind die Gleichungen der Doppelstrahlen der Involution?

278. Es ist nachzuweisen, dafs eine Involution auch durch die beiden Doppelstrahlen bestimmt sein kann. Welche Relation besteht in diesem Falle zwischen den Parametern entsprechender Strahlen?

279. Die beiden Geraden

$$11x + 2y = 0, \; 13x + 5y - 1 = 0,$$

welche dem Büschel

$$5x - 7y + 3 + k(2x + 3y - 1) = 0$$

angehören, mögen als Doppelstrahlen eines involutorischen Büschels angesehen werden. Welcher Strahl entspricht der geraden Linie, deren Gleichung $7x - 4y + 2 = 0$ ist?

280. Die beiden Doppelstrahlen eines involutorischen Strahlenbüschels mögen auf einander lotrecht stehen. Welche Lage haben in diesem Falle je zwei entsprechende Strahlen?

281. Welche Relation besteht zwischen den Parametern entsprechender Strahlen einer Involution, wenn die beiden Doppelstrahlen zusammenfallen?

282. Von einem involutorischen Strahlenbüschel sind die beiden Strahlenpaare

$$\begin{cases} 2y - x - 11 = 0, \\ 2y - 3x - 5 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y + 3x - 23 = 0, \\ y + x - 10 = 0 \end{cases}$$

gegeben. Es sollen die Gleichungen der beiden sich entsprechenden Strahlen des Büschels gefunden werden, welche auf einander lotrecht stehen.

283. Zwei involutorische Strahlenbüschel mögen den Mittelpunkt gemein haben. Von dem einen seien die beiden Strahlenpaare

$$\begin{cases} L_1 + k_1 L_2 = 0, \\ L_1 + k_2 L_2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} L_1 + k_3 L_2 = 0, \\ L_1 + k_4 L_2 = 0, \end{cases}$$

von dem zweiten

$$\begin{cases} L_1 + r_1 L_2 = 0, \\ L_1 + r_2 L_2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} L_1 + r_3 L_2 = 0, \\ L_1 + r_4 L_2 = 0 \end{cases}$$

gegeben. Es sollen die Gleichungen eines Strahlenpaares gefunden werden, welches sowohl mit den beiden ersten Paaren als auch mit den beiden letzten in Involution steht.

Homogene Koordinaten.

284. Gegeben sind die Gleichungen von drei Geraden, die nicht durch einen Punkt gehen,

$$x_1 \equiv x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = 0,$$
$$x_2 \equiv x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2 = 0,$$
$$x_3 \equiv x \cos \alpha_3 + y \sin \alpha_3 - p_3 = 0.$$

Es soll die Gleichung der Geraden $x \cos \varphi + y \sin \varphi - \delta = 0$ in der Form

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = 0$$

dargestellt werden. Welches sind die Werte der Koefficienten A_1, A_2, A_3?

285. Welche geometrische Bedeutung haben die Konstanten a_1, a_2, a_3 in der Gleichung der geraden Linie

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0?$$

286. Die Gleichungen der drei Fundamentallinien sind

$$X_1 \equiv 5x - 2y + 1 = 0,$$
$$Y_1 \equiv 2x - y - 3 = 0,$$
$$Z_1 \equiv x + y + 1 = 0.$$

Welches ist die Gleichung der Geraden $x + 2y - 4 = 0$ in homogenen Koordinaten?

287. Die Gleichungen der drei Fundamentallinien sind $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Von dem Punkte P werden auf dieselben drei Lote x_1', x_2', x_3' gefällt. Welche Relation läfst sich für dieselben aufstellen?

288. Welche Bedeutung haben die homogenen Gleichungen

$$l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 = 0$$

und

$$x_1 \sin\alpha_1 + x_2 \sin\alpha_2 + x_3 \sin\alpha_3 = 0,$$

wenn l_1, l_2, l_3 die Längen der Seiten und α_1, α_2, α_3 die Winkel des Fundamentaldreiecks sind?

289. Gegeben ist die Gleichung einer Geraden

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$$

Wie lassen sich die Schnittpunkte derselben mit den Seiten des Fundamentaldreiecks bestimmen?

290. Die Lage des Durchschnittspunktes der beiden Geraden

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$
$$a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 = 0$$

ist zu finden.

291. Die Lage der beiden Punkte A und B ist durch die Koordinaten

$$x_1',\ x_2',\ x_3' \text{ und } x_1'',\ x_2'',\ x_3''$$

bestimmt. Welches ist die Gleichung der Geraden, die durch diese beiden Punkte hindurchgeht?

292. Welches ist die Gleichung einer Geraden, die durch den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$
$$a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 = 0$$

geht?

293. Welche Bedingung mufs erfüllt sein, wenn die drei Geraden

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$
$$a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 = 0,$$
$$a_1'' x_1 + a_2'' x_2 + a_3'' x_3 = 0$$

durch einen Punkt gehen sollen?

294. Welches sind die Gleichungen der Ecktransversalen des Fundamentaldreiecks, die durch den Punkt A gehen, wenn die Koordinaten von A x_1', x_2', x_3' sind?

295. Die Gleichungen der Seiten des Fundamentaldreiecks sind $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Man verbinde die Punkte, in denen die beiden ersten Seiten von der Geraden $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ geschnitten werden, mit den beiden Eckpunkten auf der dritten Seite. Welches sind die Gleichungen der Verbindungslinien? Durch welche Relationen ist die Lage des Schnittpunktes derselben bestimmt?

296. Die Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, $a_1'x_1 + a_3'x_3 = 0$ bilden ein vollständiges Vierseit. Welches sind die Gleichungen der Diagonalen? In welchen Punkten schneiden sich dieselben?

297. Verbindet man den Punkt A in der Fläche des Fundamentaldreiecks, dessen Lage durch die Koordinaten x_1', x_2', x_3' bestimmt ist, mit den Ecken, so erhält man ein vollständiges Vierseit und zwei Diagonalen desselben. Es sollen die drei Paare gegenüber liegender Ecken des Vierseits bestimmt werden.

298. Es ist nachzuweisen, dafs in einem vollständigen Vierseit die Diagonalen harmonisch geteilt werden.

299. Die Gleichungen der Seiten des Fundamentaldreiecks sind $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Wie läfst sich die Lage der Geraden bestimmen, welche der Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ entspricht?

300. Welche Beziehung findet zwischen den Gleichungen zweier Geraden L_1 und L_2 statt, wenn dieselben einander parallel sind?

301. In dem Abstande d sind zu der Geraden

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

Parallelen zu ziehen. Welches sind die Gleichungen derselben?

302. Zu der Geraden $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ soll durch den Punkt, dessen Koordinaten x_1', x_2', x_3' sind, eine Parallele gezogen werden. Welches ist die Gleichung derselben?

303. Durch die Eckpunkte des Fundamentaldreiecks mögen Parallelen zu den gegenüberliegenden Seiten gezogen sein. Welches sind die Gleichungen derselben?

304. Es sollen die Gleichungen der Schwerpunktstransversalen des Fundamentaldreiecks und die Koordinaten des Schwerpunkts bestimmt werden.

305. Es ist zu zeigen, dafs die Verbindungslinien der Halbierungspunkte je zweier Seiten des Fundamentaldreiecks der dritten Seite parallel laufen.

306. Welche Bedingungsgleichung mufs erfüllt sein, wenn die beiden Geraden

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$
$$a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 = 0$$

sich rechtwinklig durchschneiden sollen?

307. Von dem Punkte P, dessen Koordinaten x_1', x_2', x_3' sind, ist ein Lot auf die Gerade

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

gefällt. Welches ist die Gleichung desselben?

308. In dem Fundamentaldreieck mögen die Höhen konstruiert sein. Welches sind die Gleichungen derselben? Welches sind die Koordinaten des Schnittpunktes derselben?

309. Die Fufspunkte der Höhen des Fundamentaldreiecks mögen durch gerade Linien verbunden sein. Welches sind die Gleichungen der Verbindungslinien?

310. In den Halbierungspunkten der Seiten des Fundamentaldreiecks sind Lote errichtet. Welches sind die Gleichungen derselben? Welches sind die Koordinaten des Punktes, in dem sich diese Lote durchschneiden?

311. Wie grofs ist der Abstand des Punktes P, dessen Koordinaten x_1', x_2', x_3' sind, von der Geraden

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0?$$

312. Es sind die Gleichungen der Ecktransversalen zu bestimmen, welche sich in dem Fundamentaldreieck nach den Berührungspunkten des einbeschriebenen Kreises ziehen lassen.

313. Welches sind die Gleichungen der Ecktransversalen des Fundamentaldreiecks, welche sich nach den Berührungspunkten der anbeschriebenen Kreise ziehen lassen?

Der Punkt.

Die Gleichung des Punktes (Linienkoordinaten).

314. Welches sind die Linienkoordinaten der Geraden, welche die beiden Punkte, deren Gleichungen

$$A_1 \equiv a_1 u + b_1 v + 1 = 0,$$
$$A_2 \equiv a_2 u + b_2 v + 1 = 0$$

sind, verbindet?

Beispiel. $A_1 \equiv 3u + 5v + 1 = 0,$
$A_2 \equiv 7u - 2v + 1 = 0.$

315. Wie grofs ist der Abstand des Punktes $a_1 u + b_1 v + 1 = 0$ von derjenigen Geraden, deren Linienkoordinaten u_1, v_1 sind?

316. Es soll die Gleichung desjenigen Punktes bestimmt werden, der den Abstand der beiden Punkte

$$A_1 \equiv a_1 u + b_1 v + 1 = 0,\ A_2 \equiv a_2 u + b_2 v + 1 = 0$$

halbiert.

Beispiel.

$$A_1 \equiv 5u - 3v + 1 = 0,\ A_2 \equiv 7u + 13v + 1 = 0.$$

317. Der Abstand zwischen den beiden Punkten

$$A_1 \equiv a_1 u + b_1 v + 1 = 0,\ A_2 \equiv a_2 u + b_2 v + 1 = 0$$

ist im Verhältnis m zu n zu teilen. Welches ist die Gleichung des Teilpunktes?

318. Gegeben sind die Gleichungen zweier Punkte $A_1 = 0$, $A_2 = 0$. Welcher Punkt entspricht der Gleichung $A_1 - A_2 = 0$?

319. Die Gleichungen der Ecken eines Dreiecks sind $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$. Welches ist die Gleichung des Schwerpunktes desselben?

320. Von einem Parallelogramm sind drei Eckpunkte $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$ gegeben. Welche Lage kann der vierte Eckpunkt besitzen?

321. Welches ist die Gleichung eines beliebigen Punktes, der auf der Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte $A_1 = 0$ und $A_2 = 0$ liegt?

322. Welches ist die geometrische Bedeutung des Koefficienten k in der Gleichung $A_1 - kA_2 = 0$?

323. Welche Bedingungsgleichung mufs erfüllt sein, wenn die drei Punkte $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$ in einer geraden Linie liegen sollen?

324. Gegeben sind die drei Eckpunkte eines Dreiecks $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$. Die drei Seiten des Dreiecks seien bis in die Unendlichkeit verlängert. Was läfst sich über die Lage der unendlich fernen Punkte derselben bestimmen?

325. Die drei Eckpunkte eines Dreiecks entsprechen den Gleichungen $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$. Die Seiten des Dreiecks sind geteilt; die Abschnitte von A_1A_2 sind p_3 und q_3, die von A_2A_3, p_1 und q_1 und die von A_3A_1 p_2 und q_2, und zwar besteht zwischen den Abschnitten die Relation $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3$. Wie liegen die drei Teilpunkte der Seiten?

326. Erteilt man der Gröfse k in der Gleichung

$$5u - 4v + 1 - k(2u + 3v + 1) = 0$$

alle möglichen reellen Werte, so entspricht der Gleichung eine Reihe von Punkten, welche alle auf der Verbindungslinie der beiden Punkte $5u - 4v + 1 = 0$ und $2u + 3v + 1 = 0$ liegen. Welche Punkte der Reihe entsprechen den Werten $k = 3$ und $k = -7$?

327. Welche Lage haben die Punkte $A_1 + kA_2 = 0$ und $kA_1 + A_2 = 0$ zu den beiden Fundamentalpunkten $A_1 = 0$ und $A_2 = 0$?

Das Doppelverhältnis von vier Punkten.

Erklärung. Sind die Gleichungen von vier Punkten auf einer geraden Linie

$$A_1 = 0,\ A_2 = 0;\ A_1 - k_1A_2 = 0,\ A_1 - k_2A_2 = 0,$$

so wird das Verhältnis $\frac{k_1}{k_2}$ als das Doppelverhältnis des zweiten Punktepaars zum ersten Punktepaar bezeichnet.

328. Gegeben sind zwei Punktepaare

$$\begin{cases} 5u - 4v + 1 = 0, \\ 3u + 8v + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 4u + 2v + 1 = 0, \\ u + 20v + 1 = 0. \end{cases}$$

Welchen Wert hat das Doppelverhältnis des zweiten Punktepaares zum ersten?

329. Auf einer Geraden liegt das Punktepaar

$$3u - 2v + 1 = 0,\ 4u + 7v + 1 = 0$$

und der Punkt $3\frac{2}{3}u + 4v + 1 = 0$. Welches ist die Gleichung des vierten Punktes, wenn der Wert des Doppelverhältnisses $= \frac{2}{5}$ sein soll?

330. Gegeben sind die Gleichungen von zwei Punktepaaren auf einer Geraden

$$\begin{cases} A_1 - k_1 A_2 = 0, \\ A_1 - k_2 A_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 - h_1 A_2 = 0, \\ A_1 - h_2 A_2 = 0. \end{cases}$$

Welches ist der Wert des Doppelverhältnisses des zweiten Punktepaares zum ersten?

331. Von der Punktreihe

$$5u - 4v + 1 - k(u + 3v + 1) = 0$$

sind zwei Punktepaare gegeben

$$\begin{cases} 3u - \frac{1}{2}v + 1 = 0, \\ -u + 6\frac{1}{2}v + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -7u + 17v + 1 = 0, \\ 13u - 18v + 1 = 0. \end{cases}$$

Welchen Wert besitzt das Doppelverhältnis des zweiten Punktepaares zum ersten?

332. Von der Punktreihe

$$3u - 2v + 1 - k(4u + 7v + 1) = 0$$

ist das Punktepaar

$$2u - 11v + 1,\ 2\tfrac{1}{3}u - 8v + 1 = 0$$

und der Punkt $u - 20v + 1 = 0$ gegeben. Es soll die Gleichung eines vierten Punktes bestimmt werden, so daſs der Wert des Doppelverhältnisses $= \frac{13}{16}$ wird.

Harmonische Punkte.

Erklärung. Hat das Doppelverhältnis der beiden Punktepaare A_1, A_2 und B_1, B_2 den Wert -1, so wird dasselbe ein harmonisches genannt. Die Strecke zwischen den Punkten eines Paares wird in diesem Falle von den beiden Punkten des anderen Paares harmonisch geteilt.

333. Welche Bedingungsgleichung muſs erfüllt sein, wenn das Doppelverhältnis der beiden Punktepaare

$$\begin{cases} A_1 - k_1 A_2 = 0, \\ A_1 - k_2 A_2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1 - h_1 A_2 = 0, \\ A_1 - h_2 A_2 = 0 \end{cases}$$

ein harmonisches sein soll?

334. Gegeben sind die beiden Punktepaare

$$\begin{cases} 11u - 2v + 1 = 0, \\ 3u + v + 1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 7\tfrac{4}{11}u - \tfrac{7}{11}v + 1 = 0, \\ 51u - 17v + 1 = 0. \end{cases}$$

Es soll nachgewiesen werden, dafs der Abstand zwischen den Punkten des einen Paares durch die beiden anderen Punkte harmonisch geteilt wird.

335. Zu drei Punkten, welche auf einer Geraden liegen,

$$7u + 3v + 1 = 0,\quad 2u - 5v + 1 = 0,\quad 27u + 35v + 1 = 0$$

ist der vierte harmonische Punkt zu bestimmen.

336. Von den drei Punkten $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_1 + A_2 = 0$ mögen die beiden ersten als konjugierte betrachtet werden. Welches ist die Gleichung des vierten harmonischen Punktes?

337. Gegeben sind zwei Punktepaare auf einer Geraden

$$\begin{cases} 2u + 9v + 1 = 0, \\ 5u + 3v + 1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 6u + v + 1 = 0, \\ 9u - 5v + 1 = 0. \end{cases}$$

Es soll ein Punktepaar gefunden werden, welches zu jedem der gegebenen Punktepaare harmonisch ist.

338. Die beiden Punktepaare der vorigen Aufgabe seien in anderer Weise gruppiert, nämlich

$$\begin{cases} 2u + 9v + 1 = 0, \\ 6u + v + 1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 5u + 3v + 1 = 0, \\ 9u - 5v + 1 = 0. \end{cases}$$

Welches Punktepaar wird zu beiden Paaren harmonisch sein?

339. Die vier Punkte der Aufgabe 337 seien in folgender Weise geordnet:

$$\begin{cases} 2u + 9v + 1 = 0, \\ 9u - 5v + 1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 5u + 3v + 1 = 0, \\ 6u + v + 1 = 0. \end{cases}$$

Welches Punktepaar ist zu beiden Paaren harmonisch?

340. Welchen allgemeinen Satz bestätigen die Lösungen der drei vorstehenden Aufgaben?

Involutorische Punktreihen.

341. Drei Punktepaare

$$\begin{cases} A_1 - h_1 A_2 = 0, \\ A_1 - h_2 A_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 - h_3 A_2 = 0, \\ A_1 - h_4 A_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 - h_5 A_2 = 0, \\ A_1 - h_6 A_2 = 0 \end{cases}$$

bilden eine Involution, wenn sich ein viertes Punktepaar finden läſst, welches zu jedem der gegebenen Punktepaare harmonisch ist. Welcher Bedingungsgleichung müssen in diesem Falle die Parameter der gegebenen Punktepaare genügen?

342. Von der Punktreihe

$$5u - 4v + 1 - k\,(3u + 8v + 1) = 0$$

sind drei Punktepaare gegeben

$$\begin{cases} 2u + 14v + 1 = 0, \\ 3\tfrac{2}{3}u + 4v + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 4u + 2v + 1 = 0, \\ -u + 32v + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u + 20v + 1 = 0, \\ 3\tfrac{1}{13}u + 2\tfrac{12}{13}v + 1 = 0. \end{cases}$$

Es ist zu untersuchen, ob diese Punktepaare eine Involution bilden.

343. Von der Punktreihe

$$7u + 9v + 1 - k\,(u - 3v + 1) = 0$$

sind zwei Punktepaare

$$\begin{cases} 13u + 21v + 1 = 0, \\ 19u + 33v + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -\ 5u - 15v + 1 = 0, \\ -\ 11u - 27v + 1 = 0, \end{cases}$$

und der Punkt $3u + v + 1 = 0$ gegeben. Es soll ein Punkt gefunden werden, der dem letzten Punkte zugeordnet ist, so daſs die drei Punktepaare eine Involution bilden.

344. Von einer involutorischen Punktreihe sind zwei Punktepaare gegeben

$$\begin{cases} 2u + 9v + 1 = 0, \\ 5u + 3v + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 6u + v + 1 = 0, \\ 9u - 5v + 1 = 0. \end{cases}$$

Welches sind die Gleichungen der Doppelpunkte der Involution?

345. Wie viele Doppelpunkte können in einer involutorischen Punktreihe vorkommen?

346. Gegeben sind die beiden Doppelpunkte einer involutorischen Punktreihe

$$4\tfrac{7}{9}u - \tfrac{5}{9}v + 1 = 0,\ 27u + 35v + 1 = 0.$$

Welcher Punkt der Involution entspricht dann dem Punkte

$$7u + 3v + 1 = 0?$$

347. Die beiden Doppelpunkte einer involutorischen Punktreihe entsprechen den Gleichungen

$$5u + 9v + 1 = 0, \quad 11u - 13v + 1 = 0.$$

Welcher Punkt der Involution entspricht dem unendlich fernen Punkte der Geraden, auf welcher die Punktreihe liegt?

348. Welche Lage haben je zwei zugeordnete Punkte einer involutorischen Punktreihe, wenn einer der Doppelpunkte in der Unendlichkeit liegt?

349. Die beiden Doppelpunkte einer Involution fallen zusammen, und zwar ist die Lage derselben bestimmt durch die Gleichung $A_1 = 0$. Wie liegen dann die Punkte, welche den Punkten $A_2 = 0$, $A_3 = 0$ u. s. f. zugeordnet sind?

350. Welcher Bedingungsgleichung müssen die Parameter von zwei Punktepaaren einer involutorischen Punktreihe genügen, wenn die Doppelpunkte der Involution imaginär sein sollen?

351. Gegeben sind auf einer Geraden

1) die beiden Punktepaare

$$\begin{cases} 5u - 3v + 1 = 0, \\ 7u + v + 1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 12u + 11v + 1 = 0, \\ 9u + 5v + 1 = 0, \end{cases}$$

2) die beiden Punktepaare

$$\begin{cases} 2u - 9v + 1 = 0, \\ 11u + 9v + 1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 6u - v + 1 = 0, \\ u - 11v + 1 = 0. \end{cases}$$

Es soll ein Punktepaar gesucht werden, welches sowohl mit den beiden ersten Punktepaaren als auch mit den beiden letzten Punktepaaren eine Involution bildet.

Homogene Linienkoordinaten.

352. Gegeben sind die Gleichungen von drei Punkten, die nicht in einer Geraden liegen:

$$U_1 \equiv a_1 u + b_1 v + 1 = 0,$$
$$U_2 \equiv a_2 u + b_2 v + 1 = 0,$$
$$U_3 \equiv a_3 u + b_3 v + 1 = 0.$$

Es soll die Gleichung des Punktes $au + bv + 1 = 0$ in der

Form $k_1 U_1 + k_2 U_2 + k_3 U_3 = 0$ dargestellt werden. Welche Werte haben die Koefficienten k_1, k_2, k_3?

353. Welche geometrische Bedeutung haben die Konstanten k_1, k_2, k_3 in der Gleichung des Punktes

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = 0?$$

354. Gegeben sind die Gleichungen zweier Punkte

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = 0, \quad k_1' u_1 + k_2' u_2 + k_3' u_3 = 0.$$

Es sollen die Linienkoordinaten der Geraden bestimmt werden, welche durch diese beiden Punkte geht.

355. Die Linienkoordinaten von zwei geraden Linien sind u_1', u_2', u_3' und u_1'', u_2'', u_3''. Welches ist die Gleichung des Punktes, in dem sich die beiden Geraden schneiden?

356. Welche Bedingung mufs erfüllt sein, wenn die drei Punkte

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = 0, \quad k_1' u_1 + k_2' u_2 + k_3' u_3 = 0,$$
$$k_1'' u_1 + k_2'' u_2 + k_3'' u_3 = 0$$

in einer geraden Linie liegen sollen?

357. Es ist die Gleichung eines Punktes anzugeben, der in der Verbindungslinie der beiden Punkte

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = 0, \quad k_1' u_1 + k_2' u_2 + k_3' u_3 = 0$$

liegt.

358. Welche Bedingung mufs erfüllt sein, wenn der Gleichung

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = 0$$

ein unendlich ferner Punkt entsprechen soll?

359. Welches ist die Gleichung des Schwerpunktes in dem Fundamentaldreieck? Die Gleichungen der Ecken sind $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$.

360. Die Gleichung des Mittelpunktes desjenigen Kreises ist zu bestimmen, der durch die Eckpunkte des Fundamentaldreiecks geht.

361. Welche Gestalt hat die Gleichung des Höhenpunktes des Fundamentaldreiecks?

362. Wie läfst sich nachweisen, dafs der Schwerpunkt, der Höhenpunkt und der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises des Fundamentaldreiecks in einer geraden Linie liegen?

363. Es ist die Gleichung des Mittelpunktes des eingeschriebenen Kreises zu bestimmen, d. i. desjenigen Kreises, der von den Seiten des Fundamentaldreiecks berührt wird.

364. Die Ecktransversalen des Fundamentaldreiecks, welche durch die Punkte gehen, in denen die Seiten von den anbeschriebenen Kreisen berührt werden, schneiden sich in einem Punkte. Welches ist die Gleichung dieses Punktes?

365. Wie läſst sich nachweisen, daſs der Schwerpunkt, der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises und der fünfte merkwürdige Punkt des Fundamentaldreiecks in einer geraden Linie liegen?

366. Welchen Abstand besitzt der Punkt

$$\frac{d_1}{h_1} u_1 + \frac{d_2}{h_2} u_2 + \frac{d_3}{h_3} u_3 = 0$$

von der Geraden, deren Koordinaten u_1', u_2', u_3' sind?

Der Kreis.

Die Gleichung des Kreises.

367. Welches ist die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt die Koordinaten a, b besitzt und dessen Radius $= r$ ist?

Beispiele. α) $a = 0$, $b = 0$, $r = 9$.
β) $a = 7$, $b = 0$, $r = 3$.
γ) $a = 0$, $b = -2$, $r = 11$.
δ) $a = -4$, $b = 17$, $r = 1$.

368. Welchen Bedingungen müssen die Konstanten der Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Fy + G = 0$$

genügen, wenn dieselbe einem Kreise entsprechen soll?

369. Mittelpunktskoordinaten und Radius eines Kreises zu bestimmen, welcher der Gleichung

$$Ax^2 + Ay^2 + Lx + My + N = 0$$

entspricht. Wie liegt der Kreis, wenn $N = 0$ ist?

Beispiele.

a) $15x^2 + 15y^2 + 120x - 90y - 45 = 0$.
b) $7x^2 + 7y^2 + 49x + 84y + 14 = 0$.
c) $2{,}5x^2 + 2{,}5y^2 + 12{,}5x - 7{,}5y + 10 = 0$.

370. In welcher Beziehung müssen die Konstanten der Gleichungen zweier Kreise

$$A_1x^2 + A_1y^2 + B_1x + C_1y + F_1 = 0,$$
$$A_2x^2 + A_2y^2 + B_2x + C_2y + F_2 = 0$$

stehen, wenn dieselben konzentrisch sein sollen?

371. Welche Bedeutung hat die Gleichung

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0?$$

372. Welches Gebilde entspricht der Gleichung zweiten Grades

$$Ax^2 + Ay^2 + Lx + My + N = 0,$$

wenn der Ausdruck $\frac{L^2 + M^2 - 4AN}{4A^2}$ negativ ist?

373. Es soll die Kurve bestimmt werden, welche der Proportion

$$y - 5 : 3 - x = x : y$$

entspricht.

374. Gegeben sind die Gleichungen zweier Kreise

$$x^2 + y^2 + 14x - 10y - 7 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 4x - 22y + 25 = 0.$$

Wie lautet die Gleichung der Geraden, welche die Mittelpunkte beider verbindet? Wie lang ist das Lot, welches sich vom Koordinatenanfangspunkte auf diese Gerade fällen läfst?

375. Welches geometrische Gebilde entspricht der Gleichung

$$x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 + k(x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2) = 0?$$

376. Zur Bestimmung der Polargleichung eines Kreises sind die Polarkoordinaten des Mittelpunktes ϱ_1, φ_1 und der Radius gegeben. Wie heifst die Gleichung?

377. Die Gleichung eines Kreises ist $x^2 + y^2 = 49$. Durch den Punkt $x_1 = -7$, $y_1 = -8$ werde ein neues Koordinatensystem gelegt, dessen Achsen denen des ursprünglichen Systems parallel laufen. Welches ist die Gleichung des Kreises bezüglich des zweiten Koordinatensystems?

378. Welche Änderung erfährt die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$, wenn das rechtwinklige Koordinatensystem um den Winkel α gedreht wird?

379. Gegeben ist die Gleichung eines Kreises

$$x^2 + y^2 - 7x + 11y - 3 = 0.$$

Welche Gestalt nimmt dieselbe an, wenn das rechtwinklige Koordinatensystem um einen Winkel von 45^0 gedreht wird?

380. Gegeben ist ein schiefwinkliges Koordinatensystem mit dem Koordinatenwinkel α. Wie lautet die Gleichung eines Kreises, dessen Radius $= r$ und dessen Mittelpunktskoordinaten a und b sind?

Der Kreis und die Gerade.

381. Welches sind die Koordinaten der Punkte, in denen der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ von der Geraden $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ geschnitten wird?

382. a) In welchen Punkten schneidet die Gerade $y = Mx + n$ den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$? Welche Bedingung mufs erfüllt sein, damit die Gerade den Kreis berührt?

b) Welches sind die Koordinaten der Schnittpunkte, wenn die Gleichung der Geraden $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ ist?

Beispiele. a) $x^2 + y^2 = 169, \quad y = 7x - 79.$

b) $x^2 + y^2 = 100, \quad 4x + 3y = 50.$

c) $x^2 + y^2 = 289, \quad 2y - x = 46.$

383. In welchen Punkten wird der Kreis

$$x^2 + y^2 + Bx + Cy + F = 0$$

von der Geraden $Lx + My + N = 0$ geschnitten? Wie weit ist der Mittelpunkt des Kreises von der Geraden entfernt?

Beispiele.

a) $x^2 + y^2 - 14x - 4y - 5 = 0, \quad 2y - 3x + 12 = 0;$

b) $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 27 = 0, \quad 6x + 5y = 54.$

384. a) Gegeben sind die Koordinaten einer geraden Linie u_1 und v_1. Welche Bedingung mufs erfüllt sein, wenn dieselbe den Kreis K_1, dessen Mittelpunkt der Gleichung $a_1 u + b_1 v + 1 = 0$ und dessen Radius r_1 ist, berühren soll? Welches ist die Gleichung dieses Kreises in Linienkoordinaten?

b) Welcher Bedingung müssen die Konstanten der Gleichung

$$Au^2 + Buv + Cv^2 + Du + Ev + F = 0$$

genügen, wenn derselben ein Kreis entsprechen soll? Welches ist die Gleichung des Mittelpunktes? Wie grofs ist der Radius?

385. In welchen Punkten schneidet der Kreis

$$x^2 + y^2 + 22x - 18y + 57 = 0$$

die Koordinatenachsen?

386. Welches ist die Gleichung desjenigen Kreises, der die positiven Teile der Koordinatenachsen in der Entfernung 7 vom Koordinatenanfangspunkte berührt?

387. Es sind die Gleichungen derjenigen Tangenten zu bestimmen, welche sich vom Koordinatenanfangspunkte an den Kreis $Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + F = 0$ ziehen lassen.

Beispiele.

a) $x^2 + y^2 - 22x - 14y + 161 = 0$,

b) $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 27 = 0$.

388. Die Gerade $3y + 5x + 19 = 0$ schneidet den Kreis $y^2 + x^2 = 113$ in zwei Punkten. Wie lang ist die Sehne? Wie grofs ist der zugehörige Centriwinkel?

389. Es ist die Gleichung der Geraden zu bestimmen, welche den Kreis $x^2 + y^2 = 169$ in zwei Punkten schneidet, deren Abscissen -12 und $+7$, und deren Ordinaten positiv sind. Wie grofs ist der Inhalt des von der Sehne und den Radien eingeschlossenen Dreiecks?

390. Durch den Punkt P des Kreises $x^2 + y^2 = 130$, der die Abscisse $+9$ und eine negative Ordinate besitzt, soll eine Sehne gezogen werden, welche der Geraden $5y - 4x + 7 = 0$ parallel läuft. Welches ist die Gleichung derselben? Welches sind die Koordinaten des zweiten Durchschnittspunktes?

391. Durch den Punkt (x_1, y_1) des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ ist eine Sehne zu ziehen, welche vom Mittelpunkte des Kreises den Abstand d hat.

Beispiel. $x^2 + y^2 = 65$; $x_1 = -7$, $y_1 = 4$; $d = 5$.

392. Durch den Punkt (x_1, y_1) innerhalb der Fläche des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ soll eine Sehne gezogen werden, die in diesem Punkte halbiert wird.

Beispiel. $x^2 + y^2 = 277$, $x_1 = 3$, $y_1 = -5$.

Tangente und Normale des Kreises.

393. An den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ soll im Punkte (x_1, y_1) eine Tangente gelegt werden. Welches ist die Gleichung derselben?

Beispiele.

a) $x^2 + y^2 = 353, \quad x_1 = 8, \qquad y_1 = 17.$

b) $x^2 + y^2 = 250, \quad x_1 = 9, \qquad y_1 < 0.$

c) $x^2 + y^2 = 343, \quad x_1 = -11, \quad y_1 \gtrless 0.$

394. An den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ ist in dem Punkte, dessen Abscisse x_1 und dessen Ordinate negativ ist, eine Tangente zu legen. Wie lang ist das Stück derselben zwischen den beiden Koordinatenachsen? Welches ist die Gleichung der Normale?

Beispiel. $x^2 + y^2 = 232, \quad x_1 = 14.$

395. Gegeben ist der Kreis $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$. Im Punkte (x_1, y_1) ist an denselben eine Tangente zu legen. Welches ist die Gleichung derselben?

Beispiele.

a) $(x - 5)^2 + (y + 8)^2 = 113, \quad x_1 = 13.$

b) $x^2 + y^2 - 14x - 4y - 5 = 0, \quad x_1 = 10.$

c) $x^2 + y^2 - 4x + 22y + 25 = 0, \quad x_1 = 3.$

396. An den Kreis $x^2 + y^2 - 6x - 14y - 3 = 0$ sind in den Punkten, deren Abscisse $x_1 = 9$ ist, Tangenten zu legen. Wie weit ist der Koordinatenanfangspunkt von diesen Tangenten entfernt? Wie grofs sind die Stücke derselben zwischen den Koordinatenachsen?

397. Im Punkte (x_1, y_1) ist an den Kreis

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

eine Tangente gezogen. Unter welchem Winkel schneidet dieselbe den vom Koordinatenanfangspunkte nach dem Berührungspunkte gezogenen Radiusvektor? Welches ist die Gleichung der Normale?

Beispiel. $x^2 + y^2 - 14x - 4y - 5 = 0, \; x_1 = 10, \; y_1 = 9.$

398. An den Kreis $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 27 = 0$ sind in den Punkten, deren Abscisse $= 9$ ist, Tangenten gelegt. Unter welchen Winkeln sind dieselben gegen die X-Achse geneigt?

399. Gegeben ist der Kreis $x^2 + y^2 + 10x - 6y - 2 = 0$. An denselben sind Tangenten zu legen, welche der Geraden $y = 2x - 7$ parallel laufen. Welches sind die Gleichungen der Tangenten?

400. Es sollen an den Kreis $x^2 + y^2 = 58$ Tangenten gelegt werden, welche mit der Geraden $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$ einen Winkel von 60^0 einschliefsen. Welches sind die Gleichungen derselben? Welche Gestalt nehmen die Resultate an, wenn die gegebene Gerade die X-Achse ist?

401. Durch den Punkt $x_1 = 9$, $y_1 > 0$ des Kreises

$$x^2 + y^2 - 12x + 2y + 3 = 0$$

ist eine Gerade zu ziehen, welche denselben unter einem Winkel von 45^0 schneidet.

402. An den Kreis $y = \pm\sqrt{x(32 - x)}$ mögen in den Punkten, welche zu der Abscisse $x_1 = 19$ gehören, die beiden Tangenten gelegt sein. Welchen Winkel schliefsen beide mit einander ein?

403. An den Kreis $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ sind in den Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) Tangenten gelegt. Welches ist die Tangente des von denselben eingeschlossenen Winkels? Welcher Bedingung müssen die Koordinaten der Berührungspunkte genügen, a) wenn die beiden Tangenten parallel laufen, b) wenn sie auf einander lotrecht stehen?

404. Die Gleichung eines Kreises ist $x^2 + y^2 = 144$. Die Abscisse des Berührungspunktes einer Tangente sei $x_1 = 8$. Wie lang ist die Subtangente?

405. Im Punkte (x_1, y_1) sei an den Kreis

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

eine Tangente gelegt. Wie lang ist a) die Tangente? b) die Normale? c) die Subtangente? d) die Subnormale?

Beispiel. $x^2 + y^2 - 14x - 4y - 5 = 0$, $x_1 = 10$, $y_1 = 9$.

406. Von dem Punkte (x_1, y_1) sei an den Kreis

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

eine Tangente gelegt. Wie lang ist dieselbe?

Beispiel. $(x - 3)^2 + (y - 7)^2 = 25$, $x_1 = -11$, $y_1 = -9$.

407. Gegeben sind die Gleichungen zweier Kreise

$$y^2 + x^2 - 6y - 2x + 6 = 0,$$
$$y^2 + x^2 - 22y - 20x + 52 = 0.$$

Es sind die Koordinaten eines Punktes zu bestimmen, von dem die Tangenten an beide Kreise gezogen gleich $4\sqrt{6}$ sind.

408. Von einem um den Koordinatenanfangspunkt beschriebenen Kreise ist die Subnormale eines Punktes $= p$, die Subtangente desselben Punktes $= q$. Welches ist die Gleichung dieses Kreises?

409. Um den Koordinatenanfangspunkt ist ein Kreis beschrieben, der von der Geraden $y = 3x - 5$ berührt wird. Welches ist die Gleichung desselben?

410. Auf die Tangente des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$, deren Berührungspunkt die Koordinaten x_1, y_1 besitzt, sind von den Endpunkten des auf der X-Achse liegenden Durchmessers Lote gefällt. Wie lang ist das zwischen den Fuſspunkten liegende Stück der Tangente?

411. Von dem Punkte (x_1, y_1) sollen an den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ zwei Tangenten gezogen werden. Welches sind die Gleichungen derselben? Welches sind die Koordinaten der Berührungspunkte?

Beispiel. $x^2 + y^2 = 169$, $x_1 = 16$, $y_1 = 11$.

Pol und Polare.

412. Von dem Punkte (x_1, y_1) sind zwei Tangenten an den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ gezogen. Welches ist die Gleichung der Berührungssehne (Polare des Punktes (x_1, y_1) bezüglich des Kreises)?

Beispiele. a) $x^2 + y^2 = 49$, $x_1 = 13$, $y_1 = 2$.
b) $x^2 + y^2 = 130$, $x_1 = 5$, $y_1 = -\sqrt{105}$.
c) $x^2 + y^2 = 289$, $x_1 = -12$, $y_1 = 4$.

413. Gegeben ist der Kreis $x^2 + y^2 = 121$. In welchen Punkten schneidet die Polare des Punktes $x_1 = 3$, $y_1 = 2$ denselben?

414. Welches ist die Gleichung der Polare des Punktes $x_1 = r$, $y_1 = 0$ bezüglich des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$?

415. Welches ist die Gleichung der Polare des Punktes (x_1, y_1) bezüglich des Kreises

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2?$$

Beispiele.

a) $(x-3)^2+(y+5)^2=81$, $\quad x_1=11$, $\quad y_1=17$;

b) $x^2+y^2+14x+6y+22=0$, $\quad x_1=8$, $\quad y_1=-5$;

c) $x^2+y^2-18x+2y+57=0$, $\quad x_1=-2$, $y_1=-7$.

416. Es soll die Polare des Punktes (x_1, y_1) bezüglich des Punktes (a, b) bestimmt werden. Der Punkt ist als ein Kreis mit unendlich kleinem Radius zu betrachten.

Beispiel. $x_1=11$, $y_1=3$, $a=4$, $b=-2$.

417. Die Polare des Punktes (x_1, y_1) bezüglich einer Geraden G ist zu finden. Die Gerade G ist als ein Kreis anzusehen, dessen Radius unendlich grofs ist und dessen Mittelpunkt in der Unendlichkeit liegt.

Anmerkung. Bei der Lösung möge die Kreisgleichung

$$x^2(1+k)+y^2(1+k)+(A_1+kA_2)x+(B_1+kB_2)y+C_1+kC_2=0$$

benutzt werden, welche für $k=-1$ in die Gleichung einer Geraden übergeht.

Beispiel. $5x-3y+7=0$, $x_1=8$, $y_1=20$.

418. Wo liegt die Polare des Punktes (a, b) bezüglich des Kreises $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$?

419. Unter welchem Winkel schneidet die Polare des Punktes (x_1, y_1) bezüglich des Kreises $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ die Verbindungslinie der Punkte (a, b) und (x_1, y_1)?

420. Wie läfst sich die Polare des Punktes (x_1, y_1) bezüglich des Kreises $x^2+y^2=r^2$ konstruieren?

421. Welchen Abstand hat die Polare des Punktes (x_1, y_1) bezüglich des Kreises $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ vom Mittelpunkte desselben?

422. Die Gerade $y=Mx+n$ werde als Polare bezüglich des Kreises $x^2+y^2=r^2$ betrachtet. Welches sind die Koordinaten des zugehörigen Poles?

Beispiele. a) $x^2+y^2=96$, $y=3x-24$;

b) $x^2+y^2=46$, $\frac{x}{7}-\frac{y}{3}=1$;

c) $x^2+y^2=121$, $5x-4y+17=0$.

423. Gegeben ist der Kreis $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

a) Die Gerade $Lx+My+N=0$ sei eine Polare desselben. Welches sind die Koordinaten des zugehörigen Poles?

b) Die Koordinaten einer Geraden seien u_1, v_1, welches ist die Gleichung des zugehörigen Poles in Linienkoordinaten, wenn die Gerade als Polare des Kreises betrachtet wird?

Beispiele.

a) $(x-5)^2+(y+3)^2=49$, $\quad 2x+y-11=0$.

b) $x^2+y^2-14x-4y-5=0$, $10x+9y-107=0$.

424. Die Gerade $y=4x-7$ schneidet den Kreis $y^2=10x-x^2$ in zwei Punkten. In jedem der Schnittpunkte sei eine Tangente an den Kreis gelegt. In welchem Punkte schneiden sich die Tangenten?

425. Die Gerade $y-b=\operatorname{tg}\varphi(x-a)$ sei Polare des Kreises $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Wo liegt der Pol?

426. Die gerade Linie $Lx+My+N=0$ sei Polare bezüglich des Punktes (a, b). Welches sind die Koordinaten des zugehörigen Poles?

427. Gegeben sind zwei konzentrische Kreise

$$x^2+y^2=58 \text{ und } x^2+y^2=121.$$

Die Tangente am Punkte $x_1=3$, $y_1<0$ des ersteren sei Polare bezüglich des zweiten. Welches sind die Koordinaten des Poles?

428. Gegeben ist der Kreis $x^2+y^2=r^2$. Welches sind die Koordinaten des dem Pole (x_1, y_1) konjugierten Poles, der auf der Verbindungslinie des Mittelpunktes und des Poles liegt? Diese beiden Pole werden kreisverwandte genannt.

429. Durch den Pol (x_1, y_1) sei eine Parallele zur Polare bezüglich des Kreises $x^2+y^2=r^2$ gezogen. Welches sind die Koordinaten des Poles dieser Parallelen?

430. Die Geraden des Büschels

$$L_1x+M_1y+N_1+k(L_2x+M_2y+N_2)=0$$

mögen als Polaren des Kreises $x^2+y^2=r^2$ betrachtet werden. Welches ist der geometrische Ort der zugehörigen Pole?

431. Die Punkte der Geraden $Lx+My+N=0$ mögen als Pole des Kreises $x^2+y^2=r^2$ betrachtet werden. Wie liegen die zugehörigen Polaren?

432. Gegeben ist der Kreis $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Von dem Punkte P ist eine Sekante durch denselben gezogen. Es ist nachzuweisen, dass die Strecke zwischen P und dem konjugierten Pole durch die Peripherie des Kreises harmonisch geteilt wird.

433. Gegeben sind zwei Kreise $x^2+y^2=r^2$ und $(x-a_1)^2+y^2=r_1{}^2$. Es sollen auf der Centrale derselben zwei Punkte bestimmt werden, welche in Bezug auf jeden der beiden Kreise kreisverwandte Pole sind.

Bestimmung der Gleichung eines Kreises aus gegebenen Stücken.

434. Die Koordinaten von drei Punkten in der Ebene sind: x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3. Welches ist die Gleichung des Kreises, der durch diese drei Punkte hindurchgeht? Ist die Lage des Kreises durch diese drei Punkte vollständig bestimmt?

Beispiele.

a) $x_1=0$, $y_1=0$, $x_2=0$, $y_2=12$, $x_3=5$, $y_3=0$;

b) $x_1=0$, $y_1=0$, $x_2=0$, $y_2=7$, $x_3=5$, $y_3=3$;

c) $x_1=10$, $y_1=9$, $x_2=4$, $y_2=-5$, $x_3=0$, $y_3=5$.

435. Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche durch die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) hindurchgehen?

Beispiel. $x_1=5$, $y_1=3$, $x_2=-7$, $y_2=-6$.

436. Es ist die Gleichung eines Kreises zu bestimmen, der durch die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) geht und dessen Mittelpunkt auf der Geraden $Lx+My+N=0$ liegt.

Beispiel.

$x_1=10$, $y_1=9$, $x_2=5$, $y_2=2-3\sqrt{6}$, $2y-3x+17=0$.

437. Durch die beiden Punkte $x_1=10$, $y_1=4$ und $x_2=17$, $y_2=-3$ ist ein Kreis zu legen, welcher den Radius $r=13$ besitzt.

438. Welches ist die Gleichung eines Kreises, der durch den Punkt (x_1, y_1) geht und dessen Mittelpunkt in dem Schnittpunkte der beiden Geraden $y=M_1x+n_1$, $y=M_2x+n_2$ liegt?

Beispiel. $x_1=5$, $y_1=6$, $y=7x-3$, $4y-3x=13$.

439. Wie lautet die Bedingungsgleichung, welche erfüllt sein mufs, wenn die vier Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) auf der Peripherie eines Kreises liegen sollen?

440. Es soll durch den Punkt (x_1, y_1) ein Kreis gelegt werden, welcher die Koordinatenachsen berührt. Welches ist die Gleichung desselben?

Beispiel. $x_1 = 3$, $y_1 = 6$.

441. Es ist die Gleichung eines Kreises zu bestimmen, der mit dem Radius r beschrieben auf der X-Achse ein Stück $= a$, auf der Y-Achse ein Stück $= b$ abschneidet.

Beispiel. $r = 7$, $a = 3$, $b = 2$.

442. Um den Punkt (x_1, y_1) ist ein Kreis zu beschreiben, der von der Geraden $Lx + My + N = 0$ berührt wird. Welches ist die Gleichung desselben?

Beispiel. $x_1 = 5$, $y_1 = 3$, $3x + 2y - 10 = 0$.

443. Gegeben ist die Gerade $4x + 3y - 70 = 0$. Es soll mit dem Radius $r = 10$ ein Kreis beschrieben werden, der die Gerade in dem Punkte $x_1 = 10$, $y_1 = 10$ berührt. Welches ist die Gleichung desselben?

444. Welches ist die Gleichung des Kreises, der durch den Punkt $x_1 = 5$, $y_1 = 9$ geht und die Gerade $4x + 3y + 3 = 0$ im Punkte $x_2 = -3$, $y_2 = 3$ berührt?

445. Mit dem Radius $r = 13$ soll ein Kreis beschrieben werden, der die Gerade $12x + 5y = 144$ berührt und durch den Punkt $x_1 = 2$, $y_1 = 7 + 2\sqrt{30}$ geht. Welches ist die Gleichung desselben?

446. Es soll mit dem Radius $r = \sqrt{130}$ ein Kreis beschrieben werden, der die Gerade $9x + 7y - 98 = 0$ berührt und dessen Mittelpunkt auf der Geraden $2x - 5y - 65 = 0$ liegt.

447. Es sollen die Gleichungen der Kreise gesucht werden, welche sich im Punkte $x_1 = 14$, $y_1 = 9$ schneiden und von den beiden Parallelen $8x + 11y = 220$ und $8x + 11y = -150$ berührt werden.

448. Es sind die Gleichungen der Kreise zu bestimmen,

welche den Radius r besitzen und von den beiden Geraden $y = M_1 x$ und $y = M_2 x$ berührt werden.

Beispiel. $y = \frac{5}{4}x$, $y = \frac{4}{5}x$, $r = 7$.

449. Welche Kreise werden von den beiden Geraden $6x + 7y + 9 = 0$ und $7x + 6y + 3 = 0$ berührt und zwar von der letzteren im Punkte $x_1 = 3$, $y_1 = -4$?

450. Gegeben sind die Gleichungen von drei geraden Linien $2x - y = 0$, $7y - 5x + 8 = 0$, $x - 2y - 6 = 0$. Es sollen die Gleichungen der Kreise bestimmt werden, welche von der ersten und dritten Geraden berührt werden, und deren Mittelpunkte in der zweiten Geraden liegen.

451. Die Seiten eines Dreiecks entsprechen den Gleichungen $17x + 7y = 55$, $7x + 17y = 161$, $x - y = 5$. Welches ist die Gleichung des dem Dreieck eingeschriebenen Kreises?

452. Gegeben sind die Geraden $19x + 20y - 8 = 0$ und der Punkt $x_1 = -17$, $y_1 = -15$. Es soll mit dem Radius $r = \sqrt{130}$ ein Kreis konstruiert werden, bezüglich dessen die gegebene Gerade Polare und der gegebene Punkt der zugehörige Pol ist.

453. Gegeben ist der Kreis $x^2 + y^2 = 65$ und zwei Punkte $x_1 = 3$, $y_1 = 4$ und $x_2 = 12$, $y_2 = -5$. Es sind die konjugierten kreisverwandten Pole dieser Punkte zu bestimmen. Ferner ist nachzuweisen, dafs beide Paare konjugierter Pole auf der Peripherie eines Kreises liegen, und die Gleichung dieses Kreises zu bestimmen.

454. Durch den Punkt $x_1 = 11$, $y_1 = 4$ ist ein Kreis zu legen, zu dem die beiden Punkte $x_2 = 15$, $y_2 = 7$, $x_3 = 7{,}5$, $y_3 = 3{,}5$ kreisverwandte Pole sind.

455. Mit dem Radius $r = \sqrt{52}$ soll ein Kreis beschrieben werden, der durch den Punkt $x_1 = 9$, $y_1 = 3$ geht, und zwar soll derselbe so liegen, dafs die vom Punkte $x_2 = 10$, $y_2 = 11$ an ihn gezogene Tangente $t = 13$ ist.

456. Mit dem Radius $r = 7$ ist ein Kreis zu beschreiben, der von der Geraden $y = x$ berührt wird. Welches ist die Gleichung desselben, wenn die von $x_1 = 5$, $y_1 = -3$ an ihn gezogene Tangente die Länge $t = \sqrt{83 + 42\sqrt{2}}$ besitzen soll?

457. Gegeben sind die Gleichungen der drei Seiten eines Dreiecks

$$x_1 \equiv x \cos \varphi_1 + y \sin \varphi_1 - p_1 = 0,$$
$$x_2 \equiv x \cos \varphi_2 + y \sin \varphi_2 - p_2 = 0,$$
$$x_3 \equiv x \cos \varphi_3 + y \sin \varphi_3 - p_3 = 0.$$

Welches ist die Gleichung des umschriebenen Kreises in homogenen Koordinaten?

458. Welches ist die Gleichung des Kreises, der sich dem Fundamentaldreieck einbeschreiben läſst, in homogenen Koordinaten?

Geometrische Örter.

459. Welches ist der geometrische Ort für den Mittelpunkt desjenigen Kreises, der mit dem Radius r beschrieben durch den Punkt (x_1, y_1) geht?

460. Es soll der geometrische Ort des Mittelpunktes desjenigen Kreises bestimmt werden, der mit dem Radius r_1 beschrieben den Kreis $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ berührt.

461. Zwei Tangenten des Kreises $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, welche den Winkel α einschlieſsen, mögen auf der Peripherie herumgleiten. Welches ist der geometrische Ort ihres Schnittpunktes?

462. Auf welcher Kurve liegen diejenigen Punkte, von denen die Tangenten an den Kreis $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ gezogen gleich t sind?

463. Die Grundlinie a eines Dreiecks sei konstant. Welche Kurve beschreibt der Scheitel des gegenüberliegenden Winkels, wenn die beiden anderen Seiten sich wie $m:n$ verhalten? Welche Gestalt nimmt das Resultat an, wenn $m = n$ gesetzt wird?

464. Die Grundlinie a eines Dreiecks ist konstant, die Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten gleich s^2. Welches ist der geometrische Ort der Spitze A?

465. Es ist der geometrische Ort eines Punktes zu bestimmen, der so liegt, daſs die Summe der Quadrate der Entfernungen desselben von n gegebenen Punkten (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(x_3, y_3) \cdots (x_n, y_n)$ gleich einer gegebenen Gröſse s^2 ist.

466. Auf welcher Kurve liegen die Spitzen aller Dreiecke, welche dieselbe Grundlinie a und denselben Winkel an der Spitze A haben?

467. Von einem Dreieck liegt die konstante Seite a fest, die Seite b hat eine konstante Länge und dreht sich um den links liegenden Endpunkt von a. Welche Linie beschreibt der Halbierungspunkt der dritten Seite?

468. Gegeben ist ein Punkt P und eine gerade Linie G. Es ist der geometrische Ort des Punktes zu bestimmen, für den das Quadrat der Entfernung von dem gegebenen Punkte sich zu m^2 wie die Entfernung von der gegebenen Geraden sich zu n verhält.

Beispiel. Die gegebene Gerade sei die X-Achse, die Koordinaten des Punktes seien $x_1 = 0$, $y_1 = 7$, ferner sei $m = 2$, $n = 3$.

469. Gegeben ist der Punkt (x_1, y_1) und die gerade Linie $Lx + My + N = 0$. Es ist der geometrische Ort desjenigen Punktes zu suchen, dessen Entfernung von dem gegebenen Punkte mittlere Proportionale zwischen der Entfernung von der gegebenen Geraden und der Strecke s ist.

Beispiel. $3x + 4y + 6 = 0$, $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $s = 5$.

470. Zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels bewege sich eine Gerade von der Länge s. Welches ist der geometrische Ort des Halbierungspunktes der Strecke s?

471. Gegeben ist die Gleichung eines Kreises $y^2 = 2rx - x^2$. Von dem Koordinatenanfangspunkte sind Sehnen in den Kreis gezogen, und jede derselben ist im Verhältnis m zu n geteilt. Welches ist der geometrische Ort der Teilpunkte?

Beispiele. a) $y^2 = 20x - x^2$, $m = 1$, $n = 1$;

b) $y^2 = 26x - x^2$, $m = 3$, $n = 7$.

472. In den Kreis $y^2 = 2rx - x^2$ seien vom Koordinatenanfangspunkte beliebig viele Sehnen gezogen und jede derselben um sich selbst verlängert. In welcher Kurve liegen die Endpunkte?

473. Gegeben ist die Gleichung eines Kreises $y^2 + x^2 = r^2$. Auf jedem Radius desselben ist vom Mittelpunkte aus die Ordinate seines Endpunktes abgetragen. Auf welcher Kurve liegen die Endpunkte der Abschnitte?

474. Gegeben ist die Gleichung eines Kreises $x^2 + y^2 = r^2$. Auf jedem Radius desselben ist vom Mittelpunkte aus die Abscisse seines Endpunktes abgetragen. Welches ist die Kurve, auf der die Endpunkte der Abschnitte liegen?

475. Auf welcher Linie liegen die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch den Punkt (x_1, y_1) gehen und den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ rechtwinklig durchschneiden?

476. Es soll der geometrische Ort für denjenigen Punkt gesucht werden, von dem aus die beiden Kreise $x^2 + y^2 = r^2$ und $(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1{}^2$ unter gleichen Winkeln gesehen werden.

477. Es sind die Koordinaten eines Punktes zu bestimmen, von dem aus die drei Kreise $x^2 + y^2 = 16$, $x^2 + (y - 5)^2 = 9$, $(x - 7)^2 + (y - 1)^2 = 25$ unter gleichen Winkeln gesehen werden.

478. Auf einer Geraden liegen drei Punkte L, M und N. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P, wenn $LPM = MPN$ sein soll?

479. Auf welcher Linie liegen die Schwerpunkte aller Dreiecke, welche über der auf der X-Achse festliegenden Sehne s dem Kreise $y^2 + x^2 - 2y\sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = 0$ einbeschrieben werden können?

480. Über der Grundlinie c sind beliebig viele Dreiecke konstruiert, welche alle in dem Winkel an der Spitze übereinstimmen. Auf welcher Kurve liegen die Höhenpunkte dieser Dreiecke?

481. Die Seite c eines Dreiecks und der gegenüber liegende Winkel C sind konstant, die übrigen Stücke veränderlich. Welches ist der geometrische Ort des Mittelpunktes des einbeschriebenen Kreises?

482. Gegeben sind der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ und die gerade Linie $Lx + My + N = 0$. Der Pol P des Kreises möge auf der Geraden fortrücken. Welche Linie beschreibt dann der kreisverwandte Pol?

483. Gegeben sind zwei Kreise K und K_1. Der Punkt P,

welcher als Pol bezüglich des Kreises K betrachtet wird, gleite auf der Peripherie des Kreises K_1 fort. Welche Linie beschreibt der kreisverwandte Pol? Die Centrale beider Kreise möge Abscissenachse sein, der Mittelpunkt des Kreises K Koordinatenanfangspunkt. Die Gleichung des Kreises K wird also $x^2+y^2=r^2$, die des Kreises $K_1 (x-a_1)^2+y^2=r_1{}^2$ sein.

484. Wie gestaltet sich das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn die Peripherie des Kreises K_1 durch den Mittelpunkt des Kreises K geht?

Kreise, welche durch zwei Punkte gehen.

485. Gegeben sind die Gleichungen zweier Kreise

$$K_1 \equiv x^2+y^2+A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$K_2 \equiv x^2+y^2+A_2y+B_2y+C_2=0.$$

a) Welches Gebilde entspricht der Gleichung $K_1+kK_2=0$, wenn man k alle möglichen reellen Werte erteilt?

b) Welches ist die Gleichung des Mittelpunktes des Kreises $K_1+fK_2=0$ in Linienkoordinaten, wenn die Gleichungen der Mittelpunkte der Kreise K_1 und K_2 $M_1=0$ und $M_2=0$ sind?

486. Welches ist die Gleichung eines Kreises, der durch die Schnittpunkte der beiden Kreise $K_1=0$, $K_2=0$ und durch den Punkt (x_1, y_1) geht?

Beispiele. a) $K_1 \equiv x^2+y^2-6x-10y-15=0,$
$K_2 \equiv x^2+y^2+2x+4y+20=0,$
$x_1=0, y_1=0.$

b) $K_1 \equiv x^2+y^2-4x-14y+37=0,$
$K_2 \equiv x^2+y^2+16x-26y+220=0,$
$x_1=-1, y_1=+2.$

487. Gegeben sind zwei Kreise $K_1=0$, $K_2=0$. Es soll mit dem Radius r ein Kreis beschrieben werden, der durch die Schnittpunkte der gegebenen Kreise hindurch geht. Welches ist die Gleichung desselben?

Beispiel. $K_1 \equiv x^2+y^2-6x-2y-26=0,$
$K_2 \equiv x^2+y^2+2x-4y-11=0,$
$r=5.$

488. Gegeben sind die beiden Kreise $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ und die Gerade $Lx + My + N = 0$. Es ist die Gleichung eines Kreises zu bestimmen, der durch die Schnittpunkte der beiden Kreise geht, und dessen Mittelpunkt auf der gegebenen Geraden liegt.

Beispiel. $K_1 \equiv x^2 + y^2 - 6x - 10y - 15 = 0,$

$$K_2 \equiv x^2 + y^2 + 2x + 4y + 20 = 0,$$

$$5x - 3y - 7 = 0.$$

489. Durch die Schnittpunkte der beiden Kreise

$$K_1 \equiv x^2 + y^2 + 4x - 14y - 68 = 0,$$

$$K_2 \equiv x^2 + y^2 - 6x - 22y + 30 = 0$$

ist ein Kreis zu legen, der von der X-Achse berührt wird.

490. Die gegenseitige Lage der beiden Kreise

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

$$(x - a)^2 + y^2 = r_1^2$$

ist aus den Konstanten r, r_1 und a zu bestimmen.

491. Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Kreise

$$x^2 + y^2 = 16 \text{ und } (x - 5)^2 + y^2 = 9?$$

Radikalachse und Radikalcentrum.

492. Welches ist die Gleichung der gemeinschaftlichen Sehne (Radikalachse) der beiden Kreise $K_1 = 0$, $K_2 = 0$?

Beispiele. a) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16,$

$$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 25.$$

b) $(x + 5)^2 + (y + 6)^2 = 9,$

$$(x - 7)^2 + (y - 11)^2 = 16.$$

493. Wo liegt die Radikalachse zweier konzentrischen Kreise?

494. Welches ist die Gleichung der Radikalachse des Kreises

$$K_1 \equiv (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = 0$$

und des Punktes (a_2, b_2)? Welchen Winkel schliefst die Radikalachse mit der Polare des Punktes (a_2, b_2) bezüglich des Kreises $K_1 = 0$ ein?

Beispiel. $x^2 + y^2 + 5x + 12y - 7 = 0,$

$$a_2 = 17, \; b_2 = 11.$$

495. Welches ist die Gleichung der Radikalachse der beiden Punkte $a_1 = 3$, $b_1 = 5$, und $a_2 = -4$, $b_2 = 7$?

496. Welches ist die Gleichung der Radikalachse des Kreises $K = 0$ und der geraden Linie $L = 0$?

497. Die Radikalachse des Punktes P und einer Geraden L ist zu bestimmen.

498. Es soll der geometrische Ort eines Punktes gefunden werden, von dem die Tangenten an die beiden Kreise $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ gezogen sich wie m zu n verhalten.

499. Auf welcher Linie befinden sich die Punkte, von denen sich gleiche Tangenten an die beiden Kreise $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ ziehen lassen? In welcher Beziehung steht der geometrische Ort des Punktes zur Radikalachse beider Kreise?

500. Welches ist die geometrische Bedeutung der Gröſse k in der Gleichung $K_1 - kK_2 = 0$?

501. In welcher Beziehung steht die Radikalachse der beiden Kreise $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ zu den gemeinschaftlichen Tangenten derselben?

502. Es ist zu zeigen, daſs sich die Radikalachsen von drei Kreisen $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$ in einem Punkte (dem Radikalcentrum) durchschneiden.

503. Welches sind die Koordinaten des Radikalcentrums der drei Kreise

$$(x-7)^2 + (y-9)^2 = 36,$$
$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 16,$$
$$(x+4)^2 + (y+5)^2 = 9?$$

504. Von welchem Punkte lassen sich gleiche Tangenten an die drei Kreise

$$x^2 + y^2 = 4,$$
$$x^2 + y^2 - 14x - 72 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 6x + 16y + 37 = 0$$

ziehen? Wie lang ist jede derselben?

505. Es ist die Gleichung des Kreises zu bestimmen, welcher die drei gegebenen Kreise

$$x^2 + y^2 - 14x - 18y + 94 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 8x + 10y + 32 = 0$$

rechtwinklig durchschneidet.

506. Gegeben sind zwei Kreise

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 14x + 12y + 81 = 0$$

und der Punkt $a_1 = 3$, $b_1 = -7$. Welches ist das Radikalcentrum dieser drei Gebilde?

507. Es soll die Gleichung eines Kreises gefunden werden, der durch den Punkt $a_1 = -5$, $b_1 = -4$ geht und die beiden Kreise

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 6x - 4x + 4 = 0$$

rechtwinklig durchschneidet.

508. Es ist das Radikalcentrum des Kreises

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

und der beiden Punkte $a_1 = 3$, $b_1 = -4$, $a_2 = -5$, $b_2 = -5$ zu bestimmen.

509. Durch die beiden Punkte $a_1 = -4$, $b_1 = 3$ und $a_2 = -2$, $b_2 = -3$ ist ein Kreis zu legen, der den Kreis

$$x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$$

rechtwinklig durchschneidet. Welches ist die Gleichung desselben?

510. Wie läſst sich durch eine einfache Konstruktion die Radikalachse zweier Kreise $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ finden, wenn sich dieselben weder schneiden noch berühren?

Das Kreisbüschel.

Erklärung. Alle Kreise, welche sich in zwei festen Punkten schneiden, bilden ein Kreisbüschel.

511. Welches ist die Gleichung eines Kreisbüschels, wenn die gemeinschaftliche Centrale aller Kreise mit der X-Achse, die Radikalachse mit der Y-Achse zusammenfällt?

512. Welche Werte mufs man der Konstanten k in der Gleichung

$$x^2 + y^2 - 2kx + f^2 = 0$$

erteilen, um die Gleichungen der Punktkreise des Büschels zu erhalten?

513. Unter welcher Bedingung kann ein Kreisbüschel überhaupt Punktkreise besitzen?

514. Es soll die Gleichung eines Kreisbüschels bestimmt werden, wenn die Schnittpunkte mit der Radikalachse gegeben sind.

515. Gegeben sind die Gleichungen der beiden Punktkreise des Büschels $(x \mp f)^2 + y^2 = 0$. Welches ist die Gleichung des Büschels?

516. Gegeben ist die Gleichung eines Kreisbüschels

$$x^2 + y^2 - 2kx + f^2 = 0.$$

Es ist nachzuweisen, dafs der mit der X-Achse zusammenfallende Durchmesser jedes Kreises durch die beiden Punktkreise harmonisch geteilt wird.

517. Gegeben ist ein Kreisbüschel, welches der Gleichung

$$x^2 + y^2 - 2kx + f^2 = 0$$

entspricht. Es soll derjenige Kreis desselben bestimmt werden, dessen von dem Punkte (x_1, y_1) aus gezogene Tangente die Gröfse t hat.

518. Wie läfst sich nachweisen, dafs diejenigen Kreise, welche alle Kreise eines Büschels rechtwinklig durchschneiden, ebenfalls ein Kreisbüschel (das konjugierte Kreisbüschel) bilden? Welches ist die Gleichung des konjugierten Büschels, wenn die des ursprünglichen Büschels $x^2 + y^2 - 2kx + f^2 = 0$ ist?

519. Die Gleichung eines Kreisbüschels ist

$$x^2 + y^2 - 2kx + f^2 = 0.$$

Wie liegen die Punktkreise dieses Büschels zu den Kreisen des konjugierten Büschels? Welches ist die Radikalachse des konjugierten Büschels?

520. Gegeben sind die Gleichungen von zwei konjugierten Kreisbüscheln

$$x^2 + y^2 - 2kx + f^2 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2k_1y - f^2 = 0.$$

Wie liegen die Polaren der Schnittpunkte des zweiten Büschels bezüglich der Kreise des ersten?

521. Gegeben ist ein Kreisbüschel

$$x^2 + y^2 - 2kx + f^2 = 0$$

und der Kreis $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Es soll derjenige Kreis des Büschels bestimmt werden, der den letzteren Kreis rechtwinklig durchschneidet.

522. Wie liegen die Polaren eines Punktes (x_1, y_1) bezüglich der Kreise des Büschels $x^2 + y^2 - 2kx + f^2 = 0$?

523. Gegeben ist das Kreisbüschel $x^2 + y^2 - 2kx + f^2 = 0$ und der Punkt (x_1, y_1). a) Welches sind die Koordinaten des harmonischen Poles zu (x_1, y_1) bezüglich des Büschels? b) In welchem Verhältnis wird der Abstand dieser beiden Punkte durch die Radikalachse geteilt? c) Welcher Satz gilt von den Punkten, in denen die Verbindungslinie der beiden harmonischen Pole von den Kreisen des Büschels geschnitten wird?

524. Beschreibt man über den Abständen harmonischer Pole bezüglich eines Kreisbüschels Kreise, so bilden diese ebenfalls ein Büschel. Welches ist die Gleichung desselben? In welchen Punkten schneiden sich alle Kreise des letzteren Büschels?

525. Gegeben sind zwei Kreise

$$K_1 \equiv y^2 + x^2 - 2k_1x - f^2 = 0,$$
$$K_2 \equiv y^2 + x^2 + 2k_2x - f^2 = 0.$$

Es soll ein Kreis bestimmt werden, der beide schneidet, so dafs die gemeinschaftlichen Sehnen Durchmesser der gegebenen Kreise sind.

526. Auf welcher Linie liegen die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene Kreise K_1, K_2 so schneiden, dafs die gemeinschaftlichen Sehnen Durchmesser der letzteren sind? (Sekundäre Radikalachse.)

527. Es ist zu zeigen, dafs die Kreise, welche die Peripherien von K_1 und K_2 halbieren, ein Büschel bilden. Welches ist die Radikalachse desselben?

528. Wie läfst sich nachweisen, dafs die sekundären Radikalachsen der drei Kreise

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2,$$
$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = r_2^2,$$
$$(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 = r_3^2$$

durch einen Punkt gehen?

529. Gegeben sind drei Kreise

$$y^2 + x^2 - 2x - 9 = 0,$$
$$y^2 + x^2 + 3x - 9 = 0,$$
$$y^2 + x^2 - 6y - 10x + 18 = 0.$$

Es soll ein Kreis gefunden werden, der die gegebenen Kreise so schneidet, dafs die gemeinschaftlichen Sehnen Durchmesser der letzteren sind.

Gemeinschaftliche Tangenten zweier Kreise; Ähnlichkeitspunkte, Ähnlichkeitsachsen.

530. Gegeben sind die beiden Kreise

$$K_1 \equiv (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1{}^2 = 0,$$
$$K_2 \equiv (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2{}^2 = 0.$$

Welches sind die Gleichungen der gemeinschaftlichen Tangenten derselben?

Beispiele.

a) $K_1 \equiv (x - 11)^2 + (y - 9)^2 - 16 = 0,$
$K_2 \equiv (x - 3)^2 + (y - 1)^2 - 4 = 0.$

b) $K_1 \equiv (x - 5)^2 + (y - 3)^2 - 16 = 0,$
$K_2 \equiv (x - 4)^2 + y^2 - 9 = 0.$

531. Gegeben sind die Gleichungen zweier Kreise

$$K_1 \equiv (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1{}^2 = 0,$$
$$K_2 \equiv (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2{}^2 = 0.$$

Welches sind die Koordinaten des äufseren Ähnlichkeitspunktes derselben? Welches die Koordinaten des inneren Ähnlichkeitspunktes?

Beispiel. $K_1 \equiv (x - 11)^2 + (y - 3)^2 - 36 = 0,$
$K_2 \equiv (x - 1)^2 + (y + 7)^2 - 25 = 0.$

532. Wo liegen die Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise K_1 und K_2, wenn die Radien derselben gleich sind?

533. Wo liegen die Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise K_1 und K_2, wenn dieselben sich von innen oder von aufsen berühren?

534. Gegeben ist der Kreis $(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1{}^2$ und der Punkt (a_2, b_2). Welches sind die Koordinaten der Ähnlichkeitspunkte beider?

535. Wo liegen die Ähnlichkeitspunkte der beiden Punkte (a_1, b_1) und (a_2, b_2)?

536. Gegeben sind der Kreis $(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2$ und die gerade Linie $Ax + By + C = 0$. Wo liegen die Ähnlichkeitspunkte derselben?

537. Die Gleichungen der Mittelpunkte zweier Kreise sind $A_1 = 0$, $A_2 = 0$. Wie wird der Abstand der Mittelpunkte durch die Ähnlichkeitspunkte der Kreise geteilt?

538. Gegeben sind zwei Kreise

$$K_1 \equiv (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = 0,$$
$$K_2 \equiv (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2^2 = 0.$$

Durch die Punkte, in denen dieselben von den Polaren des äufseren Ähnlichkeitspunktes geschnitten werden, soll ein Kreis gelegt werden. Welches ist die Gleichung desselben? In welchem Verhältnis wird die Centrale der beiden Kreise K_1 und K_2 durch den Mittelpunkt dieses Kreises geteilt?

539. Gegeben sind drei Kreise

$$K_1 \equiv (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = 0,$$
$$K_2 \equiv (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2^2 = 0,$$
$$K_3 \equiv (x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 - r_3^2 = 0.$$

Es ist zu zeigen, dafs die drei äufseren Ähnlichkeitspunkte derselben auf einer geraden Linie liegen. Welches ist die Gleichung dieser Geraden (Ähnlichkeitsachse)?

540. Gegeben sind drei Kreise $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$. Welche Lage haben die inneren Ähnlichkeitspunkte derselben zu den äufseren?

541. Gegeben sind drei Kreise

$$x^2 + y^2 = 16,$$
$$(x - 5)^2 + y^2 = 81,$$
$$(x - 7)^2 + (y - 10)^2 = 4.$$

Welches sind die Gleichungen der vier Ähnlichkeitsachsen derselben?

542. Zwei Kreise K_1 und K_2 werden von dem Kreise K_3 in den Punkten P_1 und P_2 berührt. In welchem Punkte schneidet die Gerade P_1P_2 die Centrale der beiden Kreise K_1 und K_2?

543. Gegeben sind zwei Kreise K_1 und K_2. Es soll ein dritter Kreis K_3 konstruiert werden, der beide Kreise berührt und zwar den zweiten im Punkte P.

544. Durch die beiden Kreise

$$K_1 \equiv (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = 0,$$
$$K_2 \equiv (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2^2 = 0$$

ist ein Büschel bestimmt. Es sollen diejenigen Kreise des Büschels $K_1 + kK_2 = 0$ gefunden werden, deren Mittelpunkte die Ähnlichkeitspunkte der Kreise K_1 und K_2 sind.

545. Gegeben ist ein Kreis

$$K_1 \equiv (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = 0$$

und die beiden Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2). Welches ist die Gleichung des Kreises, der mit dem Kreise K_1 die gegebenen Punkte zu Ähnlichkeitspunkten hat?

Beispiel. $K_1 \equiv (x - 1)^2 + (y - 4)^2 - 121 = 0,$
$x_1 = 5,\ y_1 = 20,\ x_2 = 9,\ y_2 = 36.$

546. Gegeben sind der Kreis $K_1 \equiv x^2 + y^2 - r_1^2 = 0$, der Punkt $P\ (a, b)$ und der Punkt $P_1\ (x_1, 0)$. Es soll ein Kreis bestimmt werden, der durch P geht, so daſs P_1 äuſserer Ähnlichkeitspunkt des gegebenen und gesuchten Kreises wird.

547. Gegeben sind zwei Kreise

$$K_1 \equiv x^2 + y^2 - r_1^2 = 0,$$
$$K_2 \equiv (x - a_2)^2 + y^2 - r_2^2 = 0.$$

Über dem Abstande der Ähnlichkeitspunkte dieser beiden Kreise als Durchmesser sei ein Kreis konstruiert. In welchem Verhältnis stehen die Winkel, unter denen von den einzelnen Punkten der Peripherie dieses Kreises die gegebenen Kreise erscheinen?

548. Gegeben sind die beiden Kreise

$$K_1 \equiv (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = 0,$$
$$K_2 \equiv (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2^2 = 0.$$

Über dem Abstande der Ähnlichkeitspunkte dieser Kreise als Durchmesser sei ein Kreis beschrieben. Wie liegen die Radikalachsen dieser drei Kreise?

549. Wie liegen die Polaren der Ähnlichkeitspunkte bezüglich der Kreise K_1 und K_2 zu der Radikalachse derselben?

550. Gegeben ist der Kreis K_1 und drei Punkte, welche auf einer Geraden liegen, P_1, P_2, P_3. Es sollen zwei Kreise K_2 und K_3 gesucht werden, so dafs die gegebenen Punkte äufsere Ähnlichkeitspunkte dieser drei Kreise werden und zwar P_1 von K_1 und K_2, P_2 von K_2 und K_3, P_3 von K_3 und K_1.

$$K_1 \equiv (x - 3)^2 + (y - 2)^2 - 25 = 0.$$
$$(P_1)\ x_1 = -2,\ y_1 = -\tfrac{1}{2}.\quad (P_2)\ x_2 = -8,\ y_2 = -6.$$
$$(P_3)\ x_3 = -32,\ y_3 = -28.$$

Das Taktionsproblem.

Das Problem des Apollonius fordert die Bestimmung eines Kreises, der drei gegebene Kreise berührt. Da nun der Punkt und die Gerade ebenfalls als Kreise anzusehen sind, nämlich der Punkt als ein Kreis mit unendlich kleinem Radius, die Gerade als ein Kreis mit unendlich grofsem Radius und unendlich fernem Mittelpunkte, so besteht das Problem aus zehn einzelnen Aufgaben. Zwei dieser Aufgaben sind bereits in 434 und 451 gelöst. Die übrigen acht mögen hier Platz finden. Die Lage des Koordinatensystems ist für die folgenden Aufgaben so gewählt, dafs die Lösungen sich in möglichst einfacher Weise durchführen lassen.

551. Es soll ein Kreis bestimmt werden, der durch die beiden Punkte P_1 und P_2 geht und von der Geraden G berührt wird.

Beispiel. $(P_1)\ x_1 = 0,\ y_1 = 2.\quad (P_2)\ x_2 = 0,\ y_2 = -2.$
$$G \equiv y - 5x - 7 = 0.$$

552. Durch die beiden Punkte P_1 und P_2 ist ein Kreis zu legen, welcher den gegebenen Kreis K_1 berührt.

Beispiel. $(P_1)\ x_1 = 0,\ y_1 = 3.\quad (P_2)\ x_2 = 0,\ y_2 = -3.$
$$K_1 \equiv (x - 4)^2 + (y + 3)^2 - 4 = 0.$$

553. Welches ist die Gleichung eines Kreises, der durch den Punkt P_1 geht und von den beiden Geraden G_1 und G_2 berührt wird?

Beispiel. $(P_1)\ x_1 = 3,\ y_1 = 8.$
$$G_1 \equiv y = 0.\quad G_2 \equiv 12y - 35x = 0.$$

554. Gegeben sind: der Kreis K_1, die gerade Linie G_1 und der Punkt P_1. Es soll ein Kreis bestimmt werden, der durch

den Punkt P_1 geht und von der Geraden G_1 und dem Kreise K_1 berührt wird.

Beispiel. $K_1 \equiv x^2 + (y - 6)^2 - 9 = 0.$

$$G_1 \equiv y = 0. \quad (P_1)\, x_1 = 5,\ y_1 = 2.$$

555. Durch den Punkt P_1 soll ein Kreis gelegt werden, welcher die beiden Kreise K_1 und K_2 berührt.

$$(P_1)\, x_1 = 0,\ y_1 = 0;\ K_1 \equiv (y - b_1)^2 + x^2 - r_1{}^2 = 0,$$
$$K_2 \equiv (x - \alpha_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2{}^2 = 0.$$

556. Es ist die Gleichung eines Kreises zu bestimmen, der die beiden Geraden G_1 und G_2 und den Kreis K_1 berührt.

$$G_1 \equiv y = 0,\ G_2 \equiv x \cos\varphi_1 + y \sin\varphi_1 - p_1 = 0,$$
$$K_1 \equiv x^2 + (y - b_1)^2 - r_1{}^2 = 0.$$

557. Gegeben sind die Gerade G_1 und die beiden Kreise K_1 und K_2. Es soll ein Kreis bestimmt werden, der die Gerade und die beiden Kreise berührt.

$$G_1 \equiv y = 0,\ K_1 \equiv x^2 + (y - b_1)^2 - r_1{}^2 = 0,$$
$$K_2 \equiv (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2{}^2 = 0.$$

Beispiel. $G_1 \equiv y = 0,\ K_1 \equiv x^2 + (y - 3)^2 - 4 = 0,$

$$K_2 \equiv (x - 5)^2 + (y - 2)^2 - 1 = 0.$$

558. Es soll ein Kreis gefunden werden, der die drei Kreise

$$K_1 \equiv (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1{}^2 = 0,$$
$$K_2 \equiv (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2{}^2 = 0,$$
$$K_3 \equiv (x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 - r_3{}^2 = 0$$

berührt.

Beispiel.

$$K_1 \equiv x^2 + y^2 - 1 = 0,$$
$$K_2 \equiv x^2 + (y - 5)^2 - 9 = 0,$$
$$K_3 \equiv (x - 3)^2 + (y - 3)^2 - 4 = 0.$$

Inhalt.

Seite

Der Punkt.

Der Kreis.

AUFGABEN

AUS DER

ANALYTISCHEN GEOMETRIE

DER EBENE

VON

DR. ADOLF HOCHHEIM,
PROFESSOR.

HEFT I.

DIE GERADE LINIE, DER PUNKT, DER KREIS.

B. AUFLÖSUNGEN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1882.

1—3. Einfache Konstruktionen.

4. Die gesuchten Ordinaten sind:

$$\text{a) } y = -1, \quad \text{b) } y = 11.$$

5. Die Koordinaten der Punkte sind:

a) $x = 2,\ y = -7.$ b) $x = -9,\ y = -5.$

c) $x_1 = 4,\ y_1 = 3;\quad x_2 = -2,\ y_2 = 9.$

d) $x_1 = -1,\ y_1 = -12,\ x_2 = 1,\ y_2 = 12,$

$x_3 = -4,\ y_3 = -3,\quad x_4 = 4,\ y_4 = 3.$

6. Die Anzahl der Punkte ist gleich pq.

7. Die Koordinaten der Punkte auf den Achsen sind: $(\pm a, 0)$, $(0, \pm a)$, die des Koordinatenanfangspunktes: $(0, 0)$.

8. Die Koordinaten der Ecken des Quadrats sind:

a) $\left(+\frac{s}{2}, +\frac{s}{2}\right), \left(-\frac{s}{2}, +\frac{s}{2}\right), \left(-\frac{s}{2}, -\frac{s}{2}\right), \left(+\frac{s}{2}, -\frac{s}{2}\right).$

b) $\left(+\frac{s}{2}\sqrt{2}, 0\right), \left(0, +\frac{s}{2}\sqrt{2}\right), \left(-\frac{s}{2}\sqrt{2}, 0\right), \left(0, -\frac{s}{2}\sqrt{2}\right).$

9. Sind die Koordinaten des einen Punktes (x_1, y_1), so sind die des anderen $(-x_1, -y_1)$.

10. Die Koordinaten der Ecken des regulären Achtecks sind:

a) $\left(\frac{s}{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}, \frac{s}{2}\right), \left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}\right), \left(-\frac{s}{2}, \frac{s}{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}\right), \left(-\frac{s}{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}, \frac{s}{2}\right),$

$\left(-\frac{s}{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}, -\frac{s}{2}\right), \left(-\frac{s}{2}, -\frac{s}{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}\right), \left(\frac{s}{2}, -\frac{s}{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}\right),$

$$\left(\frac{s}{2\,tg\frac{\pi}{8}}, -\frac{s}{2}\right).$$

b) $\left(\frac{s}{2\sin\frac{\pi}{8}}, 0\right)$, $\left(s\cos\frac{\pi}{8}, s\cos\frac{\pi}{8}\right)$, $\left(0, \frac{s}{2\sin\frac{\pi}{8}}\right)$,

$\left(-s\cos\frac{\pi}{8}, s\cos\frac{\pi}{8}\right)$, $\left(-\frac{s}{2\sin\frac{\pi}{8}}, 0\right)$, $\left(-s\cos\frac{\pi}{8}, -s\cos\frac{\pi}{8}\right)$,

$$\left(0, -\frac{s}{2\sin\frac{\pi}{8}}\right), \left(s\cos\frac{\pi}{8}, -s\cos\frac{\pi}{8}\right).$$

11. Es ist $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Beispiele. a) 10. b) 13. c) $2.\sqrt{229}$.

12. Man findet

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos 60^0} = 12{,}1243.$$

13. $d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = 34{,}077$.

14. Man findet zwei Punkte, deren Koordinaten

$$(0, y_1 + \sqrt{d^2 - x_1^2}), \ (0, y_1 - \sqrt{d^2 - x_1^2})$$

sind. Dieselben sind reell, wenn $d^2 > x_1^2$, sie fallen zusammen, wenn $d^2 = x_1^2$, sie sind imaginär, wenn $d^2 < x_1^2$ ist.

15. Die Bedingung ist $(x_1 - 7)^2 + (y_1 + 2)^2 = 121$, oder

$$x_1^2 + y_1^2 - 14x_1 + 4y_1 - 68 = 0.$$

16. $26x + 8y + 93 = 0$.

17. Man erhält

$$s_1 = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}, \quad s_2 = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2},$$
$$s_3 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Beispiele. a) $s_1 = 10\sqrt{10}$, $s_2 = 39$, $s_3 = \sqrt{445}$.

b) $s_1 = \sqrt{949}$, $s_2 = \sqrt{185}$, $s_3 = \sqrt{866}$.

18. $s_1 = \sqrt{41}$, $s_2 = \sqrt{185}$, $s_3 = 2\sqrt{89}$, $s_4 = \sqrt{410}$,

$$d_1 = 9\sqrt{2}, \ d_2 = \sqrt{673}.$$

19. Es ergeben sich zwei Punkte, deren Ordinaten 2 und — 8 sind.

20. $x = \frac{nx_1 \pm mx_2}{n \pm m}$, $y = \frac{ny_1 \pm my_2}{n \pm m}$.

Es existieren also im allgemeinen zwei Teilpunkte, von denen der eine auf der Strecke selbst, der andere auf der Verlängerung derselben liegt. Ist $m = n$, so liegt der zweite Teilpunkt in der Unendlichkeit.

Beispiele.

a) $x = 10$, $y = 7{,}5$; $x' = \infty$, $y' = \infty$.

b) $x = \frac{8}{3}$, $y = 0$; $x' = -16$, $y' = 12$.

c) $x = -\frac{7}{11}$, $y = 7\frac{10}{11}$; $x' = 16\frac{1}{3}$, $y' = 31\frac{2}{3}$.

21. Die Koordinaten der Halbierungspunkte der Seiten sind $(5, -2)$, $(2\frac{1}{2}, -6\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, die des Schwerpunktes $(2\frac{2}{3}, -2\frac{2}{3})$.

22. Die Koordinaten des Schwerpunktes sind $(\frac{2}{3}, 5\frac{2}{3})$. Die Entfernung desselben von der zweiten Ecke beträgt $\frac{1}{3}\sqrt{257}$, vom Koordinatenanfangspunkte $\frac{1}{3}\sqrt{293}$.

23. Der zweite Endpunkt besitzt die Koordinaten $x_2 = 6$, $y_2 = 23$.

24. Die gesuchten Punkte besitzen die Koordinaten $(4, 8)$ und $(8, 0)$.

25. Der vierte Eckpunkt des Parallelogramms hat die Koordinaten $(13, -1)$.

26. Die Koordinaten des Teilpunktes sind $(7\frac{3}{4}, -31\frac{3}{4})$.

27. Sind (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) die Koordinaten der Ecken des Dreiecks und wird die Verbindungslinie der beiden ersten Punkte im Verhältnis m zu n geteilt, so sind die Koordinaten des gesuchten Teilpunktes

$$x = \frac{q(nx_1 + mx_2) + p(n+m)x_3}{(n+m)(q+p)},$$

$$y = \frac{q(ny_1 + my_2) + p(n+m)y_3}{(n+m)(q+p)}.$$

28. Man setzt in diesem Falle $x = x' + 5$, $y = y' + 4$ und erhält so $y' = 5x' + 15$.

29. $x'^2 + y'^2 = 25$.

30. Es seien (siehe Fig. 1) X, Y die ursprünglichen, X_1, Y_1 die neuen Achsen. Wir bezeichnen OA mit x, PA mit y, OC

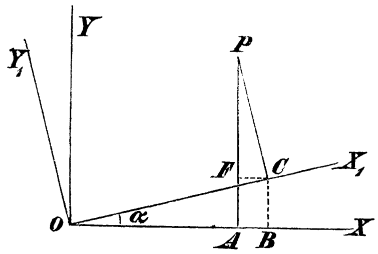


Fig. 1.

mit x_1, PC mit y_1, dann ergeben sich unmittelbar nach der Figur folgende Relationen:

$x = OB - FC = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha$,

$y = BC + FP = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha$.

Also nimmt die gegebene Relation, sobald sie auf das neue Achsensystem bezogen wird, die Gestalt an

$$x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha = f(x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha).$$

Beispiele.

a) $y_1^3 + x_1^2 y_1 + 2ax_1^2 \sin\alpha + 2ax_1 y_1 \cos\alpha = 0.$

b) $x_1^2 - y_1^2 - x_1 y_1 + 2x_1 = 0.$

31. $x_1 y_1 = -\dfrac{a^2}{2}.$

32. Der Drehungswinkel ist $= 58^0\ 16'\ 57''$.

33. Es ist $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{5}$, demnach $\sphericalangle\alpha = 54^0\ 27'\ 44{,}3''$.

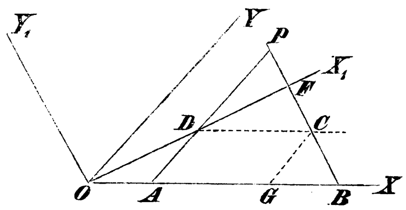


Fig. 2.

34. Bezeichnet man die ursprünglichen Koordinaten des Punktes (P) OA und PA mit x und y, ferner die Koordinaten desselben Punktes in Bezug auf das neue System OF mit x_1, PF mit y_1, so ergeben sich leicht mit Hilfe von Fig. 2 die Transformationsformeln:

$$x = \frac{x_1}{2\cos\frac{\pi}{8}} - \frac{y_1}{2\sin\frac{\pi}{8}}, \quad y = \frac{x_1}{2\cos\frac{\pi}{8}} + \frac{y_1}{2\sin\frac{\pi}{8}}.$$

Beispiel. $x_1^2 + y_1^2 + 3x_1 y_1 = 0.$

35. Die Transformationsgleichungen sind:

$$x = x_1 - y_1 \cot 60^0, \quad y = \frac{y_1}{\sin 60^0}.$$

Beispiel. $7x_1^2 + 5x_1 - y_1^2 = 0.$

36. Man findet mit Hilfe von Fig. 3

$$x = OB = OA + FD$$

$$y = PB = PD + FA$$

und daraus nach mehrfacher Anwendung des Sinussatzes

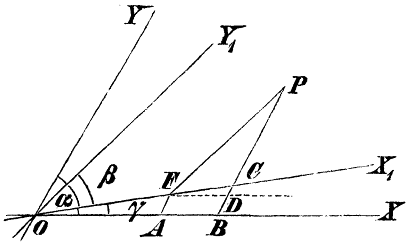


Fig. 3.

$$x = \frac{x_1 \sin(\alpha - \gamma)}{\sin \alpha} + \frac{y_1 \sin(\alpha - (\beta + \gamma))}{\sin \alpha},$$

$$y = \frac{x_1 \sin \gamma}{\sin \alpha} + \frac{y_1 \sin(\beta + \gamma)}{\sin \alpha}.$$

37. $b + x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha = f(a + x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha)$.

Vergl. die Lösungen der Aufgaben 28 und 30.

Beispiel. $y_1{}^2 x_1 - 3 = 0.$

38. Durch Verschiebung des ursprünglichen Koordinatensystems erhält man zunächst

$$y_1 + b = \varphi(x_1 + a).$$

Da ferner $y_1 = \varrho \sin(\vartheta + \alpha)$ und $x_1 = \varrho \cos(\vartheta + \alpha)$ ist, so ergiebt sich

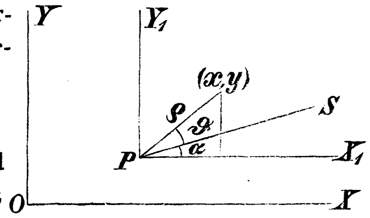


Fig. 4.

$$\varrho \sin(\vartheta + \alpha) + b = \varphi(\varrho \cos(\vartheta + \alpha) + a).$$

Beispiele. 1) $\varrho = \dfrac{5}{4 \sin^2 \dfrac{\vartheta}{2}}.$

2) $\varrho^2 = \dfrac{49}{\cos 2\vartheta}.$

3) $\varrho^2 = k^2 \cos 2\vartheta.$

39. Die Transformationsgleichungen sind folgende:

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \sin \vartheta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\cos\vartheta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{y}{x},$$

$$\vartheta = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x}\right).$$

Beispiele. 1) $\sqrt{x^2+y^2} = \frac{k}{2\pi}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x}\right)$.

2) $(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} = 2kxy$.

3) $x^3+y^3-5kxy=0$.

Die gerade Linie.

40. α) A ist die Tangente des Neigungswinkels der Geraden zur X-Achse, b das Stück, welches die Gerade auf der Y-Achse abschneidet. — β) p ist die Strecke, welche von der Geraden auf der X-Achse, q die Strecke, welche von derselben auf der Y-Achse abgeschnitten wird. — γ) p ist die Länge des vom Koordinatenanfangspunkte auf die Gerade gefällten Lotes, φ der Winkel, den dieses Lot mit der X-Achse einschliefst. — δ) (a, b) sind die Koordinaten eines bestimmten Punktes der Geraden, φ der Winkel, unter dem die Gerade zur X-Achse geneigt ist.

41. Beispiele. 1) Die Gerade läuft der Y-Achse parallel und schneidet auf dem positiven Teile der X-Achse eine Strecke gleich a ab. — 2) Die Gerade fällt mit der Y-Achse zusammen. — 3) Die Gerade läuft der Y-Achse parallel und schneidet auf dem negativen Teile der X-Achse ein Stück gleich b ab. — 4) Die Gerade läuft der X-Achse parallel und schneidet auf dem positiven Teile der Y-Achse eine Strecke gleich 2 ab. — 5) Die Gerade läuft der X-Achse parallel und schneidet auf dem negativen Teile der Y-Achse die Strecke 7 ab. — 6) Die Gerade geht durch den Koordinatenanfangspunkt und schliefst mit der X-Achse einen Winkel von 45^0 ein. — 7) Die Gerade geht durch den Koordinatenanfangspunkt und schliefst mit der X-Achse einen Winkel von 135^0 ein. — 8) Die Tangente des Neigungswinkels der Geraden zur X-Achse ist $= \frac{5}{4}$; die Gerade geht durch die beiden Punkte $(0, 0)$ und $(4, 5)$. — 9) Die Gerade ist die Verbindungslinie der Punkte $(0, 0)$ und $(-3, 7)$. — 10) Die Gerade schneidet auf dem positiven Teile der Y-Achse die Strecke a ab und ist gegen die X-Achse unter 45^0 geneigt. — 11) Die Gerade schneidet auf

dem positiven Teile der Y-Achse eine Strecke gleich 7 ab und schließt mit der X-Achse einen Winkel ein, dessen Tangente gleich $\frac{3}{4}$ ist. — 12) Die Gerade geht durch den Punkt (0, — 9) und ist der Verbindungslinie der Punkte (0, 0) und (3, 1) parallel. — 13) Die Gerade geht durch den Punkt (0, 3) und schließt mit der X-Achse einen Winkel von 135^0 ein. — 14) Die Gerade geht durch den Punkt (0, —11) und ist der Verbindungslinie der Punkte (0, 0) und (4, — 1) parallel. — 15) Die Gerade schneidet auf dem positiven Teile der X-Achse die Strecke 6, auf dem negativen Teile der Y-Achse die Strecke 7 ab. — 16) Verbindungslinie der Punkte (— 3, 0) und (0, 5). — 17) Verbindungslinie der Punkte (—11, 0) und (0, — 3). — 18) Das Lot vom Koordinatenanfangspunkte auf die Gerade gefällt ist = 5 und schliesst mit der X-Achse einen Winkel von 45^0 ein. — 19) Die Gerade geht durch den Punkt (3, 5) und ist der Verbindungslinie der Punkte (0, 0) und (3, 2) parallel. — 20) Die Gerade geht durch den Punkt (12, — 6) und ist gegen die X-Achse unter dem Winkel $\alpha = 150^0\, 15'\, 19''$ geneigt.

42. $\operatorname{tg} \alpha = - \dfrac{L}{M}$.

Beispiele. a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{3}$, $\sphericalangle\, \alpha = 59^0\, 2'\, 10''$;

b) $\operatorname{tg} \alpha = - \frac{7}{11}$, $\sphericalangle\, \alpha = 147^0\, 31'\, 44''$.

43. Wir setzen $k(Lx + My + N) = x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$. Daraus folgt: $kL = \cos \varphi$, $kM = \sin \varphi$, $kN = -p$. Der Wert von k ist sonach $= \dfrac{1}{\pm \sqrt{L^2 + M^2}}$. Das Vorzeichen der Quadratwurzel ist so zu wählen, daſs die alleinstehende Konstante negativ wird.

Beispiele. a) $-\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y = \frac{2}{5}$

oder $x \cos 233^0\, 7'\, 49'' + y \sin 233^0\, 7'\, 49'' = \frac{2}{5}$;

b) $\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y = 2$

oder $x \cos 22^0\, 37'\, 11'' + y \sin 22^0\, 37'\, 11'' = 2$.

44. Die Gleichung der Geraden ist

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

oder

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\, x + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}.$$

Beispiele. a) $y = 2x - 3$; $p = \frac{3}{\sqrt{5}}$;

b) $8{,}7y + 23x - 58{,}7 = 0$; $p = \frac{58{,}7}{\sqrt{604{,}69}}$;

c) $1{,}4y - 2{,}1x - 2{,}94 = 0$; $p = \frac{2{,}94}{\sqrt{6{,}37}}$.

45. $\frac{x}{7} - \frac{y}{2} = 1$.

46. a) $y + 3x + 4 = 0$, $5y - 3x - 34 = 0$, $2y - 3x - 1 = 0$.
b) $9y + 13x - 131{,}2 = 0$, $71y + 31x - 104{,}8 = 0$, $97y - 3x - 197{,}6 = 0$.

47. $7y + 11x - 47 = 0$, $13y + 38x - 99 = 0$, $y - 16x + 5 = 0$.

48. Die Gleichungen der Seiten sind:

$$y = 5x,\ 6y + 5x - 35 = 0,\ y = 3x - 21,\ y = -\tfrac{9}{4}x;$$

die der Diagonalen:

$$y = 0,\ 3y + 14x - 29 = 0.$$

49. Die Gleichung der gesuchten Geraden ist

$$y - y_3 = \frac{ny_1 + my_2 - y_3(m+n)}{nx_1 + mx_2 - x_3(m+n)}(x - x_3) \text{ oder}$$

$$y = \frac{ny_1 + my_2 - y_3(m+n)}{nx_1 + mx_2 - x_3(m+n)}x + \frac{n(x_1y_3 - x_3y_1) + m(x_2y_3 - x_3y_2)}{nx_1 + mx_2 - x_3(m+n)}.$$

Beispiel. $79y - 39x + 200 = 0$.

50. Die Gleichungen der Verbindungslinien sind:

$$9y + 6x - 85 = 0, \qquad 21y - 90x + 301 = 0,$$
$$27y + 24x + 43 = 0, \qquad 3y - 12x - 5 = 0.$$

51. Die Gleichung der Geraden, welche durch die beiden Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) geht, ist

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Soll der dritte Punkt auf dieser Geraden liegen, so müssen auch die Koordinaten (x_3, y_3) der Gleichung genügen, d. h. es mufs

$$y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2) = 0 \text{ oder}$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ sein.}$$

52. $y - y_1 = \operatorname{tg} \varphi\,(x - x_1)$.

Beispiele. a) $y - x\sqrt{3} - 7 + 2\sqrt{3} = 0$;

b) $y - x - 14 = 0$;

c) $3y + x\sqrt{3} + 12 - 13\sqrt{3} = 0$.

53. $y = \frac{\sqrt{3}}{3}\, x \mp 2{,}5 \cdot \sqrt{3}$.

54. $y = 2{,}355853 \cdot x \pm 0{,}34$.

55. $\frac{y}{8\,(2 \pm \sqrt{2})} + \frac{x}{10\,(2 \mp \sqrt{2})} = 1$.

56. $\frac{y}{4} + \frac{x}{3} = -1$.

57. $y - y_1 = \frac{ny_1}{nx_1 \mp my_1}\,(x - x_1)$.

Beispiel. $11y - 6x + 20 = 0$; $31y - 6x - 20 = 0$.

58. Bezeichnen wir $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - p^2}$ mit d, so erhalten wir als Gleichung der gesuchten Geraden

$$x\,\frac{px_1 \pm dy_1}{x_1^2 + y_1^2} + y\sqrt{1 - \left(\frac{px_1 \pm dy_1}{x_1^2 + y_1^2}\right)^2} = p.$$

Es ergeben sich zwei reelle Gerade, wenn $x_1^2 + y_1^2 > p^2$, eine, wenn $x_1^2 + y_1^2 = p^2$ ist.

Beispiele. a) $43x + \sqrt{2376}\;y = 455$ und

$34x + \sqrt{3069}\;y = 455$;

b) $3y - 4x = 25$.

59. $\frac{yn}{y_1(m + n)} + \frac{xm}{x_1(m + n)} = 1$.

Beispiele. a) $\frac{y}{14} + \frac{x}{10} = 1$;

b) $\frac{y}{8} - \frac{5x}{32} = 1$.

60. 1) $d = y_1 \sin\varphi + x_1 \cos\varphi - p$;

2) $d = \frac{y_1 - Mx_1 - n}{\sqrt{1 + M^2}}$;

$$3)\ d = \frac{qx_1 + py_1 - pq}{\sqrt{p^2 + q^2}};$$

$$4)\ d = \frac{Lx_1 + My_1 + N}{\sqrt{L^2 + M^2}}.$$

Der Abstand ist positiv zu nehmen, wenn der Punkt und der Koordinatenanfangspunkt auf derselben Seite der Geraden, negativ, wenn beide Punkte auf entgegengesetzten Seiten der Geraden liegen.

Beispiele. Die absoluten Längen der Lote ohne Rücksicht auf das Vorzeichen sind:

$$\text{a)}\ \tfrac{1}{2}\sqrt{10};\quad \text{b)}\ \frac{301\cdot\sqrt{85}}{425};\quad \text{c)}\ 1{,}6;\quad \text{d)}\ \sqrt{85};\quad \text{e)}\ 0.$$

61. Bezeichnen wir die Höhe des Dreiecks, welche durch (x_1, y_1) geht, mit h_1, das Lot vom Koordinatenanfangspunkt auf die durch (x_2, y_2) und (x_3, y_3) gehende Seite mit h_1' u. s. f., so erhalten wir

$$h_1 = \frac{k}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}},\quad h_2 = \frac{k}{\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}},$$

$$h_3 = \frac{k}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}},$$

wo $k = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$ ist, ferner

$$h_1' = \frac{x_2y_3 - x_3y_2}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}},\quad h_2' = \frac{x_3y_1 - x_1y_3}{\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}},$$

$$h_3' = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}.$$

Beispiele.

$$\text{a)}\ h_1 = \frac{22\sqrt{405}}{45},\qquad h_2 = \frac{99\sqrt{520}}{260},\qquad h_3 = \frac{198}{\sqrt{97}},$$

$$h_1' = \tfrac{1}{3}\sqrt{405},\qquad h_2' = \frac{2\sqrt{520}}{65},\qquad h_3' = \frac{47}{\sqrt{97}}.$$

$$\text{b)}\ h_1 = \frac{8\sqrt{386}}{193},\qquad h_2 = \frac{4\sqrt{356}}{89},\qquad h_3 = \frac{8\sqrt{202}}{101},$$

$$h_1' = \frac{100\sqrt{386}}{193},\quad h_2' = \frac{61\sqrt{356}}{178},\quad h_3' = \frac{34\sqrt{202}}{101}.$$

62. Die Abstände der beiden Geraden vom Koordinatenanfangspunkte sind $\frac{1}{\sqrt{82}}$ und $\frac{7}{\sqrt{82}}$. Da der Koordinatenanfangspunkt zwischen beiden Geraden liegt, so ist der gesuchte Abstand beider Geraden $= \frac{4\sqrt{82}}{41}$.

63. Bezeichnet man die Gleichung der gesuchten Geraden mit $y = Mx + n$, so sind die Werte der Unbekannten M und n bestimmt durch die Gleichungen $y_1 = Mx_1 + n$ und $d = \frac{y_2 - Mx_2 - n}{\sqrt{1 + M^2}}$. Im allgemeinen ergeben sich demnach für jede der Unbekannten zwei Werte, es werden also zwei Gerade der Anforderung genügen.

Beispiele. a) $8y - 7x - 14 = 0$, $7y + 8x - 97 = 0$;
b) $3y - 7x - 15 = 0$, $7y + 3x - 93 = 0$.

64. Man erhält zwei Gerade, welche der Anforderung genügen. Die Gleichung der ersten ist

$$y = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}\, x + \frac{y_1(x_3 - x_2) - x_1(y_3 - y_2)}{x_3 - x_2};$$

die beiden Punkte (x_2, y_2) (x_3, y_3) liegen auf derselben Seite dieser Geraden. Die Gleichung der zweiten ist

$$y = \frac{y_2 + y_3 - 2y_1}{x_2 + x_3 - 2x_1}\, x + \frac{y_1(x_2 + x_3 - 2x_1) - x_1(y_2 + y_3 - 2y_1)}{x_2 + x_3 - 2x_1};$$

die beiden Punkte liegen auf verschiedenen Seiten derselben.

Beispiele. a) $6y - x - 59 = 0$, $2y - 13x + 69 = 0$;
b) $7y + 8x - 19 = 0$, $3y + 16x + 17 = 0$.

65. $$p = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}\,(Lx_1 + My_1 + N)}{\sqrt{L^2 + M^2 - LM}}.$$

66. Die Koordinaten des Schnittpunktes sind:

$$x = -\frac{N_1 M_2 - N_2 M_1}{L_1 M_2 - L_2 M_1}, \quad y = -\frac{L_1 N_2 - L_2 N_1}{L_1 M_2 - L_2 M_1}.$$

Bestehen zwischen den Konstanten die Relationen

$L_1 M_2 - L_2 M_1 = 0$, $L_1 N_2 - L_2 N_1 = 0$, $M_1 N_2 - M_2 N_1 = 0$,

so wird $x = y = \frac{0}{0}$. Die beiden Geraden fallen dann zusammen. Man erhält in diesem Falle die Gleichung der einen Geraden aus der der andern durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor. Ist nur $L_1 M_2 - L_2 M_1 = 0$, so liegt der Schnittpunkt in der Unendlichkeit, d. h. die beiden Geraden sind parallel.

Beispiele.

a) $x = 5, \quad y = 7$; b) $x = -\frac{7}{11}, \quad y = 2\frac{2}{11}$;

c) $x = 1\frac{13}{27}$, $y = 5\frac{26}{27}$; d) $x = -14\frac{77}{107}$, $y = -3\frac{95}{107}$.

67. Die Koordinaten des Schnittpunktes sind:

$$x = \frac{(y_1 x_2 - y_2 x_1)(x_4 - x_3) - (y_3 x_4 - y_4 x_3)(x_2 - x_1)}{(y_4 - y_3)(x_2 - x_1) - (x_4 - x_3)(y_2 - y_1)},$$

$$y = \frac{(y_1 x_2 - y_2 x_1)(y_4 - y_3) - (y_3 x_4 - y_4 x_3)(y_2 - y_1)}{(y_4 - y_3)(x_2 - x_1) - (x_4 - x_3)(y_2 - y_1)}.$$

Beispiel. $x = -\frac{1}{5}$, $y = -3\frac{2}{5}$.

68. Beispiele.

a) $x_1 = 15\frac{5}{8}$, $y_1 = -22\frac{5}{8}$; $x_2 = -9\frac{3}{7}$, $y_2 = 2\frac{3}{7}$;
$x_3 = 7$, $y_3 = 9$.

b) $x_1 = 1\frac{18}{59}$, $y_1 = -2\frac{4}{59}$; $x_2 = 41\frac{4}{17}$, $y_2 = -10\frac{16}{17}$;
$x_3 = 12\frac{18}{23}$, $y_3 = 6\frac{3}{23}$.

69. a) Die Gleichungen der Schwerpunktstransversalen sind:

$$x - 4 = 0,\ 3y + 19x - 78 = 0,\ 3y - 4x + 14 = 0;$$

b) die Koordinaten des Schwerpunkts: $x' = 4$, $y' = \frac{2}{3}$;

c) die Abstände des Schwerpunkts von den Seiten des Dreiecks:

$$d_1 = \tfrac{23}{87}\sqrt{29},\ d_2 = \tfrac{23}{246}\sqrt{82},\ d_3 = \tfrac{23}{591}\sqrt{197}.$$

70. Die Längen der Seiten sind:

$$s_1 = 2\sqrt{10},\ s_2 = 2\sqrt{34},\ s_3 = 4\sqrt{13};$$

die Längen der Höhen:

$$h_1 = \tfrac{18}{5}\sqrt{10},\ h_2 = \tfrac{18}{17}\sqrt{34},\ h_3 = \frac{18}{\sqrt{13}}.$$

71. Man findet die Bedingungsgleichung dadurch, daſs man aus zwei der gegebenen Gleichungen x und y berechnet und die gefundenen Werte in die dritte Gleichung einsetzt. Dieselbe ist

$$L_1(M_2 N_3 - M_3 N_2) + L_2(M_3 N_1 - M_1 N_3) + L_3(M_1 N_2 - M_2 N_1) = 0,$$

$$\text{oder} \quad \begin{vmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \end{vmatrix} = 0.$$

a) $A_1(b_2 - b_3) + A_2(b_3 - b_1) + A_3(b_1 - b_2) = 0.$

72. Die Gleichungen der Mittellinien sind:

$$\begin{aligned} y(x_2 + x_3) - xy_3 &= 0, \\ y(x_3 - 2x_2) - xy_3 + x_2y_3 &= 0, \\ y(2x_3 - x_2) - 2xy_3 + x_2y_3 &= 0. \end{aligned}$$

Da die Determinante der Konstanten

$$\begin{vmatrix} x_2 + x_3 & x_3 - 2x_2 & 2x_3 - x_2 \\ -y_3 & -y_3 & -2y_3 \\ 0 & x_2y_3 & x_2y_3 \end{vmatrix}$$

gleich Null ist, so gehen die drei Geraden durch einen Punkt.

73. a) $A_1 = A_2$, b) $\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0.$

74. Die Koordinaten der Eckpunkte sind:

$$x_1 = 3\tfrac{3}{14}, \quad y_1 = \tfrac{9}{14}; \; x_2 = 1\tfrac{1}{14}, \; y_2 = 4\tfrac{3}{14};$$
$$x_3 = -\tfrac{1}{14}, \; y_3 = \tfrac{11}{14}; \; x_4 = 2\tfrac{1}{14}, \; y_4 = -2\tfrac{11}{14};$$

die Gleichungen der Diagonalen:

$$23y + x - 18 = 0, \; 7y + 49x - 82 = 0;$$

die Koordinaten des Durchschnittspunktes derselben:

$$x_5 = 1\tfrac{4}{7}, \; y_5 = \tfrac{5}{7}.$$

75. Die Längen der Seiten sind:

$$s_1 = 2\sqrt{17}, \; s_2 = 2\sqrt{5}, \; s_3 = 5\sqrt{2}, \; s_4 = \sqrt{73};$$

die der Diagonalen: $d_1 = \sqrt{149}$, $d_2 = 5\sqrt{2}$.

76. Die Koordinaten der Eckpunkte sind:

$x_1 = 1$, $y_1 = 5$; $x_2 = 7$, $y_2 = 0$; $x_3 = 4$, $y_3 = -9$; $x_4 = 0$, $y_4 = 0$; $x_5 = -10\tfrac{1}{2}$, $y_5 = -52\tfrac{1}{2}$; $x_6 = -4\tfrac{2}{17}$, $y_6 = 9\tfrac{9}{34}$;

die Gleichungen der Diagonalen:

$$3y + 14x - 29 = 0, \; y = 0, \; 62y - 600x - 3045 = 0.$$

Die Halbierungspunkte der Diagonalen liegen auf einer Geraden, deren Gleichung $y - 2x + 7 = 0$ ist.

77. Bezeichnen wir das gesuchte Teilungsverhältnis mit $\frac{m}{n}$ und die Koordinaten des Teilungspunktes mit x, y, so ist $x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m}$, $y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m}$, wenn der Schnittpunkt zwischen den gegebenen Punkten liegt, dagegen $x = \frac{nx_1 - mx_2}{n - m}$, $y = \frac{ny_1 - my_2}{n - m}$, wenn sich derselbe auf der Verlängerung der Verbindungslinie befindet. Da x, y zugleich der Gleichung der gegebenen Geraden genügen müssen, so ergiebt sich im ersten Falle

$$\frac{m}{n} = -\frac{Lx_1 + My_1 + N}{Lx_2 + My_2 + N}, \text{ im zweiten } \frac{m}{n} = \frac{Lx_1 + My_1 + N}{Lx_2 + My_2 + N};$$

$$\text{a) } \frac{m}{n} = \tfrac{19}{101}; \quad \text{b) } \frac{m}{n} = \tfrac{18}{29}.$$

78. Da die Verbindungslinie der beiden ersten Punkte der Gleichung

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

entspricht, so findet man leicht (vergl. Lös. 77)

$$\frac{m}{n} = -\frac{y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)}{y_1(x_2 - x_4) + y_2(x_4 - x_1) + y_4(x_1 - x_2)}.$$

Beispiel. $\frac{m}{n} = \tfrac{15}{19}$.

79. Nach der Lösung der Aufg. 77 findet man

$$\frac{AC_1}{C_1B} = -\frac{Lx_1 + My_1 + N}{Lx_2 + My_2 + N}, \quad \frac{BA_1}{A_1C} = -\frac{Lx_2 + My_2 + N}{Lx_3 + My_3 + N},$$
$$\frac{CB_1}{B_1A} = -\frac{Lx_3 + My_3 + N}{Lx_1 + My_1 + N}.$$

Durch Multiplikation ergiebt sich

$$\frac{AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1}{C_1B \cdot A_1C \cdot B_1A} = -1.$$

80. $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 \cdot DD_1 = A_1B \cdot B_1C \cdot C_1D \,.\, D_1A.$

81. Nach dreimaliger Anwendung der Lösung von Aufg. 78 und Multiplikation der gewonnenen Resultate findet man

$$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = BC_1 \cdot CA_1 \cdot AB_1.$$

82. Es ist

$$2J = y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2) = \begin{vmatrix} y_1 y_2 y_3 \\ x_1 x_2 x_3 \\ 1\ 1\ 1 \end{vmatrix}.$$

Die geometrische Bedeutung der in der Lösung von Aufg. 51 gefundenen Formel ist sonach: Drei Punkte liegen in einer geraden Linie, wenn der Inhalt des von ihnen gebildeten Dreiecks gleich Null ist.

Beispiele. a) 26 □; b) 97,5 □; c) 96,5 □.

83. $J = \frac{s^2}{4} \sqrt{3}.$

84. Berechnet man aus den Gleichungen der Seiten die Koordinaten der Ecken und setzt dieselben in die Inhaltsformel (s. Lös. 82) ein, so erhält man

$$2J = \frac{\{L_1(M_2N_3 - M_3N_2) + L_2(M_3N_1 - M_1N_3) + L_3(M_1N_2 - M_2N_1)\}^2}{(L_1M_2 - L_2M_1)(L_2M_3 - L_3M_2)(L_3M_1 - L_1M_3)}.$$

Drei gerade Linien schneiden sich in einem Punkte, wenn der Inhalt des von ihnen gebildeten Dreiecks gleich Null ist.

Beispiele. a) 36 □; b) 32,2 □.

85. $J = 10{,}5$ □.

86. $J = 1877{,}625$ □.

87. $J = \frac{7}{3}(33 - \sqrt{3})$ □ $= 72{,}95848\ldots$ □.

88. $J_1 : J_2 = 7 : 12.$

89. Die Koordinaten der Halbierungspunkte der Seiten sind:

$$x_1' = 2,\ y_1' = -3\tfrac{1}{2};\ x_2' = -\tfrac{1}{12},\ y_2' = -2\tfrac{5}{8};\ x_3' = -3\tfrac{1}{12},\ y_3' = 2\tfrac{7}{8};$$

demnach der Inhalt des eingeschriebenen Dreiecks gleich $4\frac{5}{12}$ □.

90. Die Koordinaten der Teilpunkte sind:

$$x_1' = 6,\ y_1' = 6;\ x_2' = -\tfrac{1}{3},\ y_2' = 1\tfrac{2}{3};\ x_3' = 1,\ y_3' = 9\tfrac{2}{5};$$

demnach der Inhalt des Dreiecks gleich $18\frac{7}{15}$ □.

91. Sind (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) die Koordinaten der Ecken des gegebenen Dreiecks, so ist der Inhalt des Sechsecks

$$\tfrac{1}{3}\{y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)\}.$$

Beispiel. $J = 28\frac{1}{3}$ □.

92. Der Inhalt des Parallelogramms ist gleich

$$\frac{1}{A_1 - A_2}\{(b_1 b_2 + b_3 b_4) - (b_1 b_4 + b_2 b_3)\}.$$

Beispiel. $J = 56$ □.

93. Die beiden durch den Koordinatenanfangspunkt gehenden Geraden bilden mit jeder der beiden Parallelen ein Dreieck. Die Differenz der Inhalte der Dreiecke ist gleich dem Inhalte des Trapezes

$$= \frac{1}{2}\frac{(M_3 - M_2)(n_2^2 - n_1^2)}{(M_2 - M_1)(M_3 - M_1)}.$$

Beispiel. $J = 59\frac{17}{20}$ □.

94. Ziehen wir zwischen dem ersten und dritten Eckpunkte die Diagonale, so ist der Inhalt des Vierecks gleich der Summe der Inhalte der Dreiecke, in welche dasselbe durch die Diagonale zerlegt wird.

$$\begin{aligned} J &= \tfrac{1}{2}\{y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2) + y_1(x_3 - x_4) \\ &\qquad + y_3(x_4 - x_1) + y_4(x_1 - x_3)\} \\ &= \tfrac{1}{2}\{y_1(x_2 - x_4) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_4 - x_2) + y_4(x_1 - x_3)\} \\ &= \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} y_1 - y_3 & y_2 - y_4 \\ x_1 - x_3 & x_2 - x_4 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Beispiele. a) 59 □. b) 51,5 □.

95. Die Koordinaten der Halbierungspunkte der Seiten sind:

$$x_1 = 4{,}5,\ y_1 = 4;\ x_2 = 8,\ y_2 = 1;\ x_3 = 4,\ y_3 = -2{,}5;$$
$$x_4 = 0{,}5,\ y_4 = 0{,}5;$$

demnach der Inhalt des eingeschriebenen Vierecks gleich 24,25 □.

96. Der Inhalt des Fünfecks ist

$$J_5 = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & x_5 \\ y_4 & y_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_5 & x_1 \\ y_5 & y_1 \end{vmatrix}\right\}$$
$$= 68 \ \square.$$

97. Die von dem Viereck abgeschnittenen Dreiecke betragen zusammen $\frac{2}{9}$ des Inhaltes des Vierecks, demnach

$$J_8 = \frac{7}{18}\begin{vmatrix} y_1 - y_3 & y_2 - y_4 \\ x_1 - x_3 & x_2 - x_4 \end{vmatrix}.$$

Beispiel. $37\frac{13}{18}$ □

98. Zieht man von der Ecke (x_1, y_1) die $(n-3)$ Diagonalen, so ist der Inhalt des n-Ecks gleich der Summe der Inhalte der $(n-2)$ Teildreiecke. Es ergiebt sich demnach

$$\begin{aligned} J_n = \tfrac{1}{2}\{ & y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2) \\ & + y_1(x_3 - x_4) + y_3(x_4 - x_1) + y_4(x_1 - x_3) \\ & \quad \vdots \\ & + y_1(x_{n-1} - x_n) + y_{n-1}(x_n - x_1) + y_n(x_1 - x_{n-1})\} \end{aligned}$$

oder

$$= \tfrac{1}{2}\{y_1(x_2 - x_n) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_4 - x_2) + \cdots + y_n(x_1 - x_{n-1})\}.$$

99. Die gesuchte Gleichung ist

$$L_1x + M_1y + N_1 + k(L_2x + M_2y + N_2) = 0,$$

in der die Konstante k jeden beliebigen Wert besitzen kann. Setzt man die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden gegebenen Geraden ein, so wird die Gleichung zu einer identischen.

100. Man erhält $L_1x + M_1y + N_1 = 0$ für $k = 0$, dagegen $L_2x + M_2y + N_2 = 0$ für $k = \infty$.

101. Da die Gerade $L_1x + M_1y + N_1 + k(L_2x + M_2y + N_2) = 0$ durch den Punkt (x_1, y_1) hindurchgehen soll, so ist der Wert von $k = -\frac{L_1x_1 + M_1y_1 + N_1}{L_2x_1 + M_2y_1 + N_2}$; demnach ist die gesuchte Gleichung

$$\begin{aligned} & (L_1x + M_1y + N_1)(L_2x_1 + M_2y_1 + N_2) \\ & - (L_2x + M_2y + N_2)(L_1x_1 + M_1y_1 + N_1) = 0. \end{aligned}$$

Beispiele. a) $44x + y = 0$, b) $5x + y - 16 = 0$,
c) $653x + 853y + 53 = 0$.

102. $472x - 29y + 174 = 0$.

103. Der Wert von k ist in diesem Falle bestimmt durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} 60^0 = \sqrt{3} = \frac{7 - 2k}{1 + k}.$$

Die gesuchte Gleichung ist sonach

$$y = x\sqrt{3} + 3 - \sqrt{3}.$$

104. Die Gröfse k wird gefunden mit Hilfe der Gleichung

$$\frac{(11 + 55k)^2}{(2 + 7k)^2 + (6k - 3)^2} = 25.$$

Da diese Gleichung zwei Wurzeln $k_1 = -\frac{17}{10}$, $k_2 = \frac{2}{15}$ besitzt, so ergeben sich zwei Gerade, welche der Anforderung genügen. Die Gleichungen derselben sind:

$$4x + 3y = 25, \quad -3x + 4y = 25.$$

105. Man findet zwei Werte von k, also existieren zwei Gerade, welche der Aufgabe entsprechen. Die Gleichungen derselben sind:

$$7x + 8y - 56 = 0, \quad 63x + 200y - 840 = 0.$$

106. $8y - 7x + 9 = 0.$

Die gesuchte Gerade mufs sowohl der Gleichung

$$5y - 2x - 11 + k_1(y + 4x - 33) = 0$$

als auch

$$k_2(10y + x + 21) + k_3(3y - 5x + 1) = 0$$

entsprechen. Da diese Gleichungen identisch sind, so ergeben sich zur Bestimmung der Unbekannten k_1, k_2, k_3 die Relationen:

$$k_1 + 5 = 10k_2 + 3k_3, \quad 4k_1 - 2 = k_2 - 5k_3, \quad -33k_1 - 11 = 21k_2 + k_3.$$

107. Setzt man die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden ersten Geraden in die Gleichung

$$k_1(L_1x + M_1y + N_1) + k_2(L_2x + M_2y + N_2) + k_3(L_3x + M_3y + N_3) = 0,$$

so werden die beiden ersten Teile derselben verschwinden, also wird auch der dritte Teil durch Einsetzung derselben gleich Null.

108. Die Gleichungen der Mittellinien sind:

$$y(x_2 + x_3) - xy_3 = 0,$$
$$y(x_3 - 2x_2) - xy_3 + x_2y_3 = 0,$$
$$y(x_2 - 2x_3) + 2xy_3 - x_2y_3 = 0.$$

Da die Summation dieser drei Gleichungen zu der identischen Gleichung $0 = 0$ führt, so müssen die Geraden durch einen Punkt gehen.

109. 1) $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{A_1 - A_2}{1 + A_1A_2}.$

2) $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{(A_1 - A_2)\sin\omega}{1 + (A_1 + A_2)\cos\omega + A_1A_2}.$

Beispiele. a) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{11}$, $\sphericalangle\varphi = 10^0\,18'\,17{,}4''$;

b) $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{61}{23}$, $\sphericalangle\varphi = 110^0\,39'\,32''$;

c) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{23}{2}$, $\sphericalangle\varphi = 85^0\,1'\,48{,}9''$;

d) $\sphericalangle \varphi = 15^0$;

e) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{4\sqrt{3}}{35}$, $\sphericalangle \varphi = 11^0\ 11'\ 48{,}7''$.

110. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 x_2 + y_1 y_2}$.

Beispiel. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{81}{85}$, $\sphericalangle \varphi = 43^0\ 37'\ 10{,}7''$.

111. Man findet $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{L_2 M_1 - L_1 M_2}{L_1 L_2 + M_1 M_2}$ u. s. f.

Beispiele. a) $\sphericalangle \alpha_1 = 40^0\ 48'\ 54{,}3''$, $\sphericalangle \alpha_2 = 107^0\ 39'\ 0{,}5''$,
$\sphericalangle \alpha_3 = 31^0\ 32'\ 5{,}2''$;

b) $\sphericalangle \alpha_1 = 151^0\ 51'\ 30''$, $\sphericalangle \alpha_2 = 10^0\ 25'\ 33''$,
$\sphericalangle \alpha_3 = 17^0\ 42'\ 57''$.

112. Es ist

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{(x_2+x_3-2x_1)(y_3+y_1-2y_2)-(x_3+x_1-2x_2)(y_2+y_3-2y_1)}{(x_2+x_3-2x_1)(x_3+x_1-2x_2)+(y_2+y_3-2y_1)(y_3+y_1-2y_2)}$$

u. s. f.

Beispiel. $\sphericalangle \alpha_1 = 157^0\ 32'\ 15{,}3''$, $\sphericalangle \alpha_2 = 36^0\ 2'\ 51{,}1''$,
$\sphericalangle \alpha_3 = 166^0\ 24'\ 53{,}6''$.

113. $\sphericalangle \alpha = 54^0\ 14'\ 46''$, $\sphericalangle \beta = 96^0\ 0'\ 32''$;
$\sphericalangle \gamma = 100^0\ 18'\ 17{,}5''$, $\sphericalangle \delta = 109^0\ 26'\ 24{,}5''$.

114. $\sphericalangle \varphi = 71^0\ 42'\ 14{,}4''$.

115. Die Gleichungen der Diagonalen sind:

$$y = 5,\ 2y - 3x - 10 = 0,\ 2y - 3x - 1 = 0,$$

demnach die gesuchten Winkel:

$$\sphericalangle \varphi_1 = 56^0\ 18'\ 36'',\ \sphericalangle \varphi_2 = 0^0,\ \sphericalangle \varphi_3 = 123^0\ 41'\ 24''.$$

116. $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\dfrac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} - \dfrac{n y_2 + m y_3 - y_1(n+m)}{n x_2 + m x_3 - x_1(n+m)}}{1 + \dfrac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} \cdot \dfrac{n y_2 + m y_3 - y_1(n+m)}{n x_2 + m x_3 - x_1(n+m)}}.$$

Beispiel. $\sphericalangle \varphi = 81^0\ 28'\ 9''$.

117. a) $\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ M_1 & M_2 \end{vmatrix} = 0$, b) $\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0$, c) $A_1 = A_2$.

118. $3y + 2x - 31 = 0$.

119. $y - y_1 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}(x - x_1)$.

Beispiel. $y = 6x - 27$.

120. Die beiden Parallelen entsprechen der Gleichung

$$4x + 5y + 11 \pm 3\sqrt{41} = 0.$$

121. $k = \frac{L_3 M_1 - M_3 L_1}{L_2 M_3 - L_3 M_2}$.

122. a) $31y - 313 = 0$, b) $62x + 31y - 1115 = 0$.

123. Ist p der Abstand der beiden Parallelen und α der Winkel, unter welchem die Gerade von jeder der Parallelen geschnitten wird, endlich φ der Neigungswinkel der Geraden zur X-Achse, so ergeben sich die Relationen

$$\frac{p}{d} = \sin\alpha, \ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\varphi - M_1}{1 + M_1 \operatorname{tg}\varphi};$$

demnach ist die Gleichung der gesuchten Geraden

$$y - y_1 = \frac{p \pm M_1\sqrt{d^2 - p^2}}{\pm\sqrt{d^2 - p^2} - M_1 p}(x - x_1).$$

Für $d > p$ erhält man zwei Gerade, für $d = p$ nur eine einzige Gerade. Ist $d < p$, so läſst sich die Aufgabe nicht lösen.

Beispiel. $y + 7 = \frac{21 \mp 16\sqrt{11}}{28 \pm 12\sqrt{11}}(x + 2)$.

124. a) $L_1 L_2 + M_1 M_2 = 0$, b) $1 + A_1 A_2 = 0$.

125. $L(y - y_1) - M(x - x_1) = 0$.

Beispiele. a) $4y + x + 49 = 0$;

b) $23y - 7x - 193 = 0$.

126. $5y + 7x - 117 = 0$.

127. $y - \frac{ny_1 + my_2}{n + m} = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\left(x - \frac{nx_1 + mx_2}{n + m}\right)$.

Beispiel. $121y - 88x - 371 = 0$.

128. Die Koordinaten des Schnittpunktes sind:

$$x_2 = \frac{My_1 + x_1 - Mn}{1 + M^2}, \ y_2 = \frac{M^2 y_1 + Mx_1 + n}{1 + M^2},$$

der Abschnitt auf der X-Achse ist $p = x_1 + My_1$, der auf der Y-Achse $q = \frac{x_1 + My_1}{M}$.

Beispiel. Die Gleichung des Lotes ist $14y + 7x = 71$; ferner ist $x_2 = 6\frac{23}{65}$, $y_2 = 6\frac{41}{65}$; $p = 10\frac{1}{7}$, $q = 17\frac{3}{4}$.

129. Die Konstante ist in diesem Falle durch die Relation $\frac{2 + 5k}{3 + 4k} = -\frac{8}{7}$ bestimmt; die gesuchte Gleichung ist demnach $56x + 49y - 583 = 0$.

130. Es ist $\frac{2 + 3k}{5 - 4k} = \frac{4}{3}$, also die Gleichung des Lotes $92x + 69y + 102 = 0$.

131. $11\frac{47}{91}$ □.

132. $y - 2x + 7 = 0$, $9y + 2x - 42 = 0$, $7y + 6x - 56 = 0$.

133. Bezeichnet man mit (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) die Koordinaten der Ecken des Dreiecks, so sind die Gleichungen der Höhen:

$$y(y_2 - y_1) + x(x_2 - x_1) - y_3(y_2 - y_1) - x_3(x_2 - x_1) = 0,$$
$$y(y_3 - y_2) + x(x_3 - x_2) - y_1(y_3 - y_2) - x_1(x_3 - x_2) = 0,$$
$$y(y_1 - y_3) + x(x_1 - x_3) - y_2(y_1 - y_3) - x_2(x_1 - x_3) = 0.$$

Beispiel.

$$3y - x - 26 = 0,\ 3y + 5x + 8 = 0,\ 3y + 2x - 9 = 0.$$

134. Summiert man die in der Lösung der vorhergehenden Aufgabe gewonnenen Gleichungen, so ist auch die Summe der linken Seiten gleich Null. Die drei Höhen müssen demnach durch einen Punkt gehen. Vgl. die Lösung der Aufgabe 107.

$$x' = -5\tfrac{2}{3},\ y' = 6\tfrac{7}{9}.$$

135. $x = 6$.

136. Sind die Koordinaten der Ecken des Dreiecks (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), so lassen sich die Gleichungen der Lote in den Halbierungspunkten der Seiten in folgender Form darstellen:

$$y(y_2 - y_1) + x(x_2 - x_1) - \tfrac{1}{2}(y_2^2 - y_1^2) - \tfrac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) = 0,$$
$$y(y_3 - y_2) + x(x_3 - x_2) - \tfrac{1}{2}(y_3^2 - y_2^2) - \tfrac{1}{2}(x_3^2 - x_2^2) = 0,$$
$$y(y_1 - y_3) + x(x_1 - x_3) - \tfrac{1}{2}(y_1^2 - y_3^2) - \tfrac{1}{2}(x_1^2 - x_3^2) = 0.$$

Beispiel. $9y - 2x - 12 = 0$, $4y - 10x - 63 = 0$,

$$-40y + 18x + 111 = 0.$$

137. Den Beweis führt man leicht durch Summation der Gleichungen, welche in der Lösung der vorhergehenden Aufgabe aufgestellt sind.

138. Die Koordinaten des Schnittpunktes der Lote sind $x_1 = -4$, $y_1 = -10$; die Entfernung dieses Punktes von jeder Ecke des Dreiecks beträgt $\sqrt{85}$.

139. Der gesuchte Winkel φ ist das Supplement von dem Winkel, welchen die beiden gegebenen Geraden mit einander einschliefsen, also

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{L_2 M_1 - L_1 M_2}{L_1 L_2 + M_1 M_2}.$$

140. Die Gleichung der Geraden ist

$$y - y_1 = -\frac{L_1 + M_1 \operatorname{tg}\alpha}{M_1 - L_1 \operatorname{tg}\alpha}(x - x_1).$$

Beispiele. a) $6y + x - 33 = 0.$

b) $23y + (110 + 73\sqrt{3})x + 82 + 146\sqrt{3} = 0.$

141. $x(4 + 51\sqrt{3}) - y(205 + 68\sqrt{3}) - 339\frac{5}{23} - 119\sqrt{3} = 0.$

142. Die Gleichung der Seite, welche dem Winkel α gegenüberliegt, ist $2y - x + 15 = 0$, die Gleichung der Seite, welche β gegenüberliegt, $7y - 9x - 8 = 0$.

143. 1) Sind x, y die Koordinaten eines Punktes der Halbierungslinie desjenigen Winkels, in welchem der Koordinatenanfangspunkt liegt, so müssen dieselben der Gleichung

$$x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 = x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2$$

genügen (vgl. Lös. 60). Da diese Relation für jeden Punkt der Halbierungslinie Geltung hat, so ist die Gleichung dieser Linie

$$x(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) + y(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2) - (p_1 - p_2) = 0,$$

dagegen die Gleichung der Halbierungslinie des Nebenwinkels

$$x(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) + y(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2) - (p_1 + p_2) = 0.$$

2) Bringt man die beiden gegebenen Gleichungen auf die Normalform, so findet man als Gleichungen der Halbierungslinien

$$\frac{L_1 x + M_1 y + N_1}{\pm\sqrt{L_1^2 + M_1^2}} - \frac{L_2 x + M_2 y + N_2}{\pm\sqrt{L_2^2 + M_2^2}} = 0,$$

$$\frac{L_1 x + M_1 y + N_1}{\pm\sqrt{L_1^2 + M_1^2}} + \frac{L_2 x + M_2 y + N_2}{\pm\sqrt{L_2^2 + M_2^2}} = 0.$$

Die Vorzeichen der Wurzeln sind nach Lösung 43 zu bestimmen.

Beispiele.

a) $y + x + 79 = 0,\ 7y - 7x - 23 = 0,$

b) $1144y - 156x + 707 = 0,\ 24y + 176x + 201 = 0.$

144. Sind

$$x \cos\alpha_1 + y \sin\alpha_1 - p_1 = 0 \text{ und } x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2 = 0$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden, so sind die Richtungskonstanten der Halbierungslinien

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \text{ und } -\cot\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}.$$

Da das Produkt derselben gleich -1 ist, so müssen die beiden Halbierungslinien lotrecht zu einander stehen.

145. Die Gleichungen der Halbierungslinien der Innenwinkel sind: $28y - 224x - 219 = 0,\ 77y + 99x - 1 = 0,\ 14y - 2x - 17 = 0,$ die der Halbierungslinien der Aufsenwinkel: $128y + 16x - 899 = 0,\ 9y - 7x + 113 = 0,\ 2y + 14x + 69 = 0.$

146. Die Gleichungen der Winkelhalbierenden sind:

$$y\left\{x_3\sqrt{(x_3-x_2)^2+y_3^2}-(x_3-x_2)\sqrt{x_3^2+y_3^2}\right\}$$
$$-x\left(y_3\sqrt{(x_3-x_2)^2+y_3^2}+y_3\sqrt{x_3^2+y_3^2}\right)+x_2y_3\sqrt{x_3^2+y_3^2}=0,$$
$$y\left\{(x_3-x_2)-\sqrt{(x_3-x_2)^2+y_3^2}\right\}+xy_3-x_2y_3=0,$$
$$y\left(\sqrt{x_3^2+y_3^2}-x_3\right)+xy_3=0.$$

147. 1) Die Koordinaten des Schnittpunktes sind:

$$x_1 = \frac{64 - 5\sqrt{58}}{7},\ y_1 = -3;$$

2) der Abstand dieses Punktes von den Seiten $d = \frac{15 + 2\sqrt{58}}{7}$.

148. $$\frac{13y - 11x - 7}{\sqrt{145}} \mp \frac{3y + 5x - 13}{\sqrt{17}} = 0.$$

149. Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden liegt im Koordinatenanfangspunkte.

150. Die Punkte liegen auf zwei geraden Linien, welche der Gleichung

$Lx + My + N \pm a\sqrt{L^2 + M^2} = 0$ entsprechen.

151. Der geometrische Ort ist eine Gerade, welche der Verbindungslinie der beiden Punkte (x_2, y_2) und (x_3, y_3) parallel läuft.

Die Gleichung derselben ist

$$y - \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

Beispiel. $2y + 4x - 3 = 0$.

152. Die Gleichung des geometrischen Ortes ist

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = \frac{nx_1 \cos\varphi + ny_1 \sin\varphi + pm}{n + m};$$

die Punkte befinden sich also auf einer Geraden, welche der gegebenen Geraden parallel läuft.

153. Nach der Aufgabe müssen die Koordinaten (x, y) des Punktes der Relation

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2$$

genügen, woraus sich nach einfacher Umformung ergiebt

$$y - \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

Der Ort ist also eine Gerade, welche senkrecht zu der Verbindungslinie der gegebenen Punkte steht und dieselbe halbiert.

154. Bildet man die Abstände des Punktes (x, y) von den gegebenen Geraden, so erhält man als Gleichung des Ortes

$$\pm \frac{y - M_1 x - n_1}{\sqrt{1 + M_1^2}} \mp \frac{y - M_2 x - n_2}{\sqrt{1 + M_2^2}} = d.$$

Derselbe wird also von zwei Geraden gebildet, die einander parallel laufen.

155. Die Koordinaten des Punktes (x, y) müssen der Gleichung

$$\pm \{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2\} \mp \{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2\} = a^2$$

genügen. Durch Entwicklung derselben findet man

$$y - \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) \pm \frac{a^2}{2(y_2 - y_1)}$$

Der g. O. besteht demnach aus zwei Geraden, welche auf der Verbindungslinie der gegebenen Punkte lotrecht stehen.

156. *a*) Sind $L_1 x + M_1 y + N_1 = 0$, $L_2 x + M_2 y + N_2 = 0$ die Gleichungen der Schenkel des gegebenen Winkels, so ist die Gleichung des gesuchten Weges

$$\frac{L_1 x + M_1 y + N_1}{\sqrt{L_1^2 + M_1^2}} + \frac{L_2 x + M_2 y + N_2}{\sqrt{L_2^2 + M_2^2}} = s.$$

b) Betrachten wir die Schenkel des gegebenen Winkels als Koordinatenachsen, so ergiebt sich als Gleichung des geometrischen Ortes
$$x + y = \frac{s}{\sin\alpha}.$$

157. $x(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cdots + \cos\alpha_n) + y(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \cdots + \sin\alpha_n) - (p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n) = s.$

158. Der Punkt beschreibt eine Gerade, deren Gleichung entweder
$$n\frac{L_1x + M_1y + N_1}{\sqrt{L_1^2 + M_1^2}} = m\frac{L_2x + M_2y + N_2}{\sqrt{L_2^2 + M_2^2}}$$
oder
$$m\frac{L_1x + M_1y + N_1}{\sqrt{L_1^2 + M_1^2}} = n\frac{L_2x + M_2y + N_2}{\sqrt{L_2^2 + M_2^2}}$$
ist.

159. Die Schenkel des rechten Winkels seien Koordinatenachsen und die Gleichung der gegebenen Geraden $Lx + My + N = 0$, dann liegen die Teilpunkte entweder auf der Geraden $Mmy - Lnx = 0$, oder auf der Geraden $Mny - Lmx = 0$.

160. Bezeichnen wir die Kathete, deren Endpunkt auf der Y-Achse fortgleitet, mit a, die andere mit b, so ist die Gleichung der Linie, welche der Scheitel beschreibt,
$$y = \frac{b}{a}x.$$

161. Ist r die Strecke, welche den festen Scheitel mit dem Koordinatenanfangspunkte verbindet, und α der Winkel, den dieselbe mit der X-Achse einschliefst, so ist die Gleichung der Linie, welche der Teilungspunkt beschreibt,
$$\frac{y(m+n)}{n}\sin\alpha + \frac{x(m+n)}{m}\cos\alpha = r.$$

162. Die Spitzen der gleichseitigen Dreiecke liegen auf einer Geraden, welche die gegebene Gerade unter einem Winkel von 60^0 schneidet. Die Gleichung des geometrischen Ortes ist
$$y(1 + M\sqrt{3}) + x(\sqrt{3} - M) = 2n.$$

163. Die Basis a falle mit der X-Achse zusammen, der eine Endpunkt derselben mit dem Koordinatenanfangspunkte. Nimmt man den Abstand des betreffenden Punktes von der Basis gleich

der Seite, die nicht durch den Koordinatenanfangspunkt geht, so ist der geometrische Ort des Punktes

$$\frac{2ax}{(s-a)^2+a^2}+\frac{2(s-a)y}{(s-a)^2+a^2}=1.$$

164. Die Grundlinie a falle mit der X-Achse, der eine Endpunkt mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammen. Bezeichnet man die Höhe des Dreiecks mit h, den Abstand des Fufspunktes derselben vom Koordinatenanfangspunkte mit p, so ergiebt sich als Gleichung des geometrischen Ortes

$$\frac{2x}{a}+\frac{2(a-2p)y}{ah}=1.$$

165. Die Lage des Dreiecks sei dieselbe wie in der vorhergehenden Lösung. Bedient man sich auch derselben Bezeichnungen für die gegebenen Stücke, so erhält man als Gleichung des geometrischen Ortes

$$\frac{2x}{a}+\frac{(a-2p)y}{ah}=1.$$

166. Die Lage des Dreiecks sei dieselbe wie in der Lösung der Aufgabe 164. Sind $y=M_1x$ und $y=M_2x+n$ die Gleichungen der Dreiecksseiten, auf denen die Lote errichtet werden sollen, so ist die Gleichung des geometrischen Ortes

$$y(M_2+M_1)+x(1-M_1M_2)-\frac{n(1+M_1^2)}{M_2-M_1}=0.$$

167. Der eine Schenkel des gegebenen Winkels α falle mit der X-Achse zusammen, die Ordinatenachse sei das im Scheitel auf jenem Schenkel errichtete Lot. Die Gleichung des zweiten Schenkels ist dann $y = x \operatorname{tg} \alpha$. Bestimmt man die Abschnitte auf den Schenkeln und setzt deren Summe gleich s, so erhält man als Gleichung des geometrischen Ortes

$$x(1+\cos\alpha)+y\sin\alpha=s.$$

Sind die Schenkel des Winkels Achsen eines schiefwinkligen Systems, so findet man

$$x+y=\frac{s}{1+\cos\alpha}.$$

168. Betrachten wir die gegebenen Richtungslinien als die Achsen eines schiefwinkligen Koordinatensystems, und bezeichnen

den gegebenen Umfang der Parallelogramme mit $2s$, so erhalten wir als Gleichung des geometrischen Ortes

$$x + y = s.$$

Der Ort ist also eine Gerade, welche auf den Koordinatenachsen Strecken abschneidet, deren jede gleich s ist.

169. Man wählt OA zur X-Achse, OB zur Y-Achse und setzt $OL = a$, $OM = a_1$, $OR = b$, $ON = b_1$, dann ist die Gleichung von RM $\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b} = 1$, die von LN $\frac{x}{a} + \frac{y}{b_1} = 1$. Bezeichnet man die Koordinaten des Punktes P mit

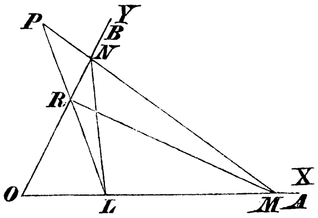


Fig. 5.

x_1, y_1, so findet man zur Bestimmung der Unbekannten a, a_1, b, b_1, die Gleichungen $\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b} = 1$, $\frac{x_1}{a_1} + \frac{y_1}{b_1} = 1$. Aus den beiden ersten Gleichungen ergiebt sich $x\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_1}\right) - y\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b_1}\right) = 0$, aus den beiden letzten $x_1\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_1}\right) + y_1\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b_1}\right) = 0$. Daraus folgt nach Elimination der Unbekannten als Gleichung des geometrischen Ortes

$$y = -\frac{y_1}{x_1}\,x.$$

Derselbe bleibt also unverändert, wenn der Punkt P auf der Geraden OP fortrückt.

170. Wir bezeichnen der Kürze wegen die Winkel mit A, B, C, die ihnen gegenüberliegenden Seiten mit a, b, c und führen, um möglichst einfache Resultate zu erzielen, statt der drei Seiten den Radius des umschriebenen Kreises ein:

$$a = 2R \sin A,\ \ b = 2R \sin B,\ \ c = 2R \sin C;$$

dann sind die Koordinaten des Schwerpunktes:

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{2}{3} R (\sin A \cos B + 2 \cos A \sin B), \\ y &= \tfrac{2}{3} R \sin A \sin B, \end{aligned}\right\} (1)$$

die Koordinaten des Höhenpunktes:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2R \cos A \sin B, \\ y &= 2R \cos A \cos B, \end{aligned}\right\} (2)$$

die Koordinaten des Mittelpunktes des umschriebenen Kreises:

$$\left.\begin{aligned} x &= R \sin(A + B), \\ y &= -R \cos(A + B), \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

die Koordinaten des Mittelpunktes des einbeschriebenen Kreises:

$$\left.\begin{aligned} x &= 4R \cos\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \cos\frac{A+B}{2}, \\ y &= 4R \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \cos\frac{A+B}{2}, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

endlich die Koordinaten des fünften merkwürdigen Punktes:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2R(\sin A - \sin B + \cos A \sin B), \\ y &= 8R \sin^2\frac{A}{2} \sin^2\frac{B}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Die Gleichungen der geometrischen Örter erhält man durch Elimination von R aus je zwei zusammengehörigen Gleichungen; also für den geometrischen Ort des Schwerpunktes

$$y = \frac{1}{2 \cot A + \cot B} \cdot x,$$

für den des Höhenpunktes

$$y = \cdot\, x \cot B,$$

für den des Mittelpunktes des umschriebenen Kreises

$$y = x \cot C,$$

für den des Mittelpunktes des eingeschriebenen Kreises

$$y = x \operatorname{tg}\frac{A}{2},$$

endlich für den des fünften merkwürdigen Punktes

$$y = \frac{2}{\cot\frac{A}{2} \operatorname{cosec}^2\frac{B}{2} - 2 \cot\frac{B}{2}} \cdot x.$$

Die fünf merkwürdigen Punkte bewegen sich demnach in diesem Falle auf geraden Linien, die alle durch den Koordinatenanfangspunkt gehen.

171. Entweder durch die Relationen (4) oder auch durch eine sehr einfache geometrische Betrachtung findet man als Gleichung des geometrischen Ortes

$$y = x \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

172. Aus den Formeln (2) der Lösung 170 ergiebt sich als Gleichung des geometrischen Ortes

$$y = x \cot B.$$

173. Für den Höhenpunkt findet man

$$y = x \cot B,$$

für den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises

$$y = -x \cot B + \frac{a}{2 \sin B},$$

für den Schwerpunkt

$$y = \frac{a}{3} \sin B,$$

und für den fünften merkwürdigen Punkt

$$y = -(x - a) \operatorname{tg} \frac{B}{2}.$$

174. Es ergiebt sich für den Schwerpunkt

$$y = \tfrac{2}{3}\, b \sin A,$$

für den Höhenpunkt

$$x = b \cos A,$$

für den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises

$$y = -x \cot A + \frac{b}{2 \sin A}$$

und für den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises

$$y = x \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

175. Die Gleichungen der geometrischen Örter sind:

$$y = x \cot C \text{ und } y = -(x - b) \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

176. Man erhält für den Schwerpunkt

$$y = \left(x - \frac{c}{3}\right) \operatorname{tg} A,$$

für den Höhenpunkt

$$y = -(x - c) \cot A,$$

für den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises

$$x = \frac{c}{2},$$

und für den des eingeschriebenen Kreises

$$y = x \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

177. Der Schwerpunkt bewegt sich auf einer Geraden fort, deren Gleichung

$$y = Mx - \frac{cM - n}{3}$$

ist; dieselbe läuft also der gegebenen Geraden parallel.

178. Die Schenkel des gegebenen Winkels mögen als Koordinatenachsen betrachtet werden. Ist für eine bestimmte Lage der dritten Seite die mit der X-Achse zusammenfallende Seite a, so lassen sich die beiden Relationen

$$s - a : a = s - (a + y) : x$$

und

$$m + n : n = a : x$$

aufstellen, aus denen man durch Elimination von a die Gleichung des geometrischen Ortes erhält

$$xm + yn = \frac{smn}{m + n}.$$

179. Die Schenkel des gegebenen Winkels mögen die Achsen des Koordinatensystems sein; dann läfst sich die Gleichung der gesuchten Geraden in der Form $\frac{y}{f} + \frac{x}{g} = 1$ darstellen. Zur Bestimmung der Unbekannten f und g kann man die Relationen $\frac{y_1}{f} + \frac{x_1}{g} = 1$, $a^2 = f^2 + g^2 - 2fg\cos\alpha$ benutzen. Die gesuchte Gerade kann vier verschiedene Lagen besitzen.

180. Zieht man durch den Schnittpunkt der beiden ersten Geraden Parallelen zu den Koordinatenachsen und bezieht die gegebenen Stücke auf diese neuen Achsen, so gehen die Gleichungen derselben über in

$$4y_1 - 3x_1 = 0, \quad 6y_1 - 7x_1 = 0, \quad 12y_1 + 5x_1 - 29 = 0.$$

Berechnet man das Stück, welches von der dritten Geraden zwischen den beiden ersten liegt, so mufs sich dasselbe zu 32,5 verhalten wie $\frac{29}{13}$ zu dem Abstande der gesuchten Geraden vom Koordinatenanfangspunkte. Daraus findet man die Gleichung der Geraden

$$12y_1 + 5x_1 - 1596 = 0.$$

181. Verbindet man die beiden gegebenen Punkte durch eine Gerade und errichtet im Halbierungspunkte auf derselben ein Lot, so ist die Gleichung desselben

$$4y - 3x + 8 = 0.$$

Der Durchschnittspunkt dieses Lotes und der gegebenen Geraden ist der gesuchte Punkt. Die Koordinaten desselben sind:

$$x_1 = 10,\ y_1 = 5\tfrac{1}{2}.$$

182. Die Lote, welche in den Halbierungspunkten der betreffenden Strecken errichtet sind, entsprechen den Gleichungen

$$y + x - 12 = 0,\ 8y - 10x + 89 = 0.$$

Der Schnittpunkt derselben ist der gesuchte Punkt. Die Koordinaten desselben sind $x = 10\frac{5}{18}$, $y = 1\frac{13}{18}$.

183. Man findet zwei Punkte, welche der Aufgabe genügen, da sich in der Entfernung d zwei Parallelen zu der gegebenen Geraden ziehen lassen. Die Koordinaten derselben sind:

$$x_1' = -5\tfrac{19}{58},\ y_1' = 14\tfrac{7}{29} \text{ und } x_2' = 1\tfrac{41}{58},\ y_2' = 3\tfrac{20}{29}.$$

184. Die Gleichung der Geraden ist

$$y - y_1 = \frac{n(y_1 - y_2) + m\,(y_3 - y_1)}{n(x_1 - x_2) + m\,(x_3 - x_1)}\,(x - x_1).$$

185. Betrachten wir die Schenkel des gegebenen Winkels als Koordinatenachsen und bezeichnen die Koordinaten des Punktes P mit x_1, y_1, so erhalten wir als Gleichung der gesuchten Geraden

$$\frac{x}{2x_1} + \frac{y}{2y_1} = 1.$$

186. $4y - 3x - 19 = 0.$

187. Bezeichnen wir die gesuchte Gleichung durch $y = Mx + n$, so erhalten wir zur Bestimmung der Unbekannten M und n die beiden Gleichungen

$$y_1 = Mx_1 + n,$$

$$y_1 - y_2 - M(x_1 - x_2) = d\sqrt{1 + M^2}.$$

Es ergeben sich also zwei Gerade, welche den Anforderungen der Aufgabe genügen.

188. Die Relationen sind:

$$x_1x_2 - 3x_2x_3 + x_3x_1 = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2,$$
$$y_1y_2 - 3y_2y_3 + y_3y_1 = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2.$$

189. Man erhält

$$2(x_1x_2 + x_3x_4) = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4),$$
$$2(y_1y_2 + y_3y_4) = (y_1 + y_2)(y_3 + y_4).$$

190. Benutzt man die in der Lösung 170 aufgestellten Koordinaten der drei Punkte, so findet man, dafs

$$\begin{vmatrix} 2R\cos A\cos B & 2R\cos A\sin B & 1 \\ \frac{2}{3}R\sin A\sin B & \frac{2}{3}R(\sin A\cos B + 2\cos A\sin B) & 1 \\ -R\cos(A+B) & R\sin(A+B) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ist, woraus nach Lösung 51 folgt, dafs die drei Punkte in einer Geraden liegen. Befinden sich drei Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) auf einer Geraden, so ist das Verhältnis, in dem der zweite Punkt den Abstand des ersten und dritten teilt, gleich $\frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_3}$; also erhält man nach Einsetzung der Werte $m : n = 2 : 1$.

191. Es ist

$$\begin{vmatrix} 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A+B}{2} & 4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A+B}{2} & 1 \\ \frac{2}{3}R\sin A\sin B & \frac{2}{3}R(\sin A\cos B + 2\cos A\sin B) & 1 \\ 8R\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2} & 2R(\sin A - \sin B + \cos A\sin B) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Daraus folgt, dafs alle drei Punkte in einer geraden Linie liegen. Das Teilungsverhältnis ist $m : n = 1 : 2$.

192. Die Koordinaten der Halbierungspunkte der Diagonalen des Vierseits sind:

$x_1 = 0$, $y_1 = 3$; $x_2 = -1$, $y_2 = 0$; $x_3 = -1\frac{63}{65}$, $y_3 = -2\frac{59}{65}$.

Da $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2\frac{59}{65} & -1\frac{63}{65} & 1 \end{vmatrix} = 0$ ist, so müssen die drei Halbierungspunkte in einer Geraden liegen.

193. Man fällt von dem Punkte $x_2 = 9$, $y_2 = 3$ ein Lot auf die gegebene Gerade und verlängert dasselbe um sich selbst. Der Endpunkt hat die Koordinaten $x_3 = 1$, $y_3 = 7$. Verbindet man diesen Punkt mit dem Punkte (x_1, y_1), so schneidet die Verbindungslinie die gegebene Gerade in dem gesuchten Punkte. Die Koordinaten desselben sind: $x = 7\frac{2}{13}$, $y = 9\frac{4}{13}$.

194. Die Koordinaten der beiden Endpunkte der Grundlinien sind $x_1 = 2$, $y_1 = 4$; $x_2 = 7{,}5$, $y_2 = 2{,}2$. Die Koordinaten des dritten Eckpunktes entwickelt man leicht mit Hilfe der Relationen

$$x' = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y' = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad \text{nämlich} \quad x_3 = 5{,}5,$$

$y_3 = 11{,}8$. Alle übrigen Stücke lassen sich daraus leicht finden.

195. Es lassen sich zwei Dreiecke konstruieren; die Koordinaten der gesuchten Ecken sind:

$$x_3 = 10{,}5 + 4\sqrt{3},\ y_3 = 6 - 7{,}5\sqrt{3};$$
$$x_3' = 10{,}5 - 4\sqrt{3},\ y_3' = 6 + 7{,}5\sqrt{3}.$$

196. Die Gleichungen der Halbierungslinien derjenigen Winkel, welche von den gegebenen Geraden gebildet werden, sind:

$$990y - 300x - 1189 = 0,\ 170y + 561x - 2378 = 0.$$

Fällt man von dem gegebenen Punkte (x_1, y_1) Lote auf die Halbierungslinien, so werden dieselben der Anforderung der Aufgabe genügen. Die gesuchten Gleichungen sind sonach:

$$10y + 33x - 195 = 0,\ 33y - 10x - 49 = 0.$$

197. Die Gleichung der Parallelen ist

$$11y + 154x - 700 = 0,$$

die Winkel, welche dieselbe mit den geschnittenen Seiten einschließt, sind $\sphericalangle \alpha = 10^0\,25'\,33''$, $\sphericalangle \beta = 17^0\,42'\,57''$.

198. Betrachten wir die Schenkel des Winkels als Achsen eines schiefwinkligen Koordinatensystems und bezeichnen die Koordinaten des Punktes P mit x_1, y_1, so ist die Gleichung der gesuchten Geraden, wenn der Abschnitt derselben gleich dem auf der Y-Achse sein soll:

$$y - y_1 = -\frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}(x - x_1),$$

wenn dagegen der Abschnitt derselben gleich dem auf der X-Achse sein soll,

$$y - y_1 = - \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}(x - x_1).$$

199. Die Koordinaten des gesuchten Punktes müssen den Gleichungen $8x + 19y + 4 = 0$ und $2x - 3y + 16\frac{1}{2} = 0$ genügen; sie sind demnach $x_1 = -5\frac{1}{4}$, $y_1 = 2$. Der Abstand des Punktes von jeder der beiden Seiten ist gleich 15.

200. Die Halbierungslinie des Winkels, der von der ersten und zweiten Seite gebildet wird, entspricht der Gleichung $y = \frac{1}{2}x$. Da dieselbe die dritte Seite in dem Punkte $x_1 = 2\frac{1}{2}$, $y_1 = \frac{5}{4}$ schneidet, so ist die Gleichung der gesuchten Parallelen $4y - 5 = 0$. Die Länge derselben ist gleich $\frac{25}{16}$.

201. Bildet man das Fuſspunktendreieck, so sind die Halbierungslinien der Winkel desselben die Höhen des gesuchten Dreiecks, also die Gleichungen derselben:

$$y - 2x + 7 = 0,\quad 9y + 2x - 42 = 0,\quad 7y + 6x - 56 = 0,$$

und die Gleichungen der Seiten:

$$2y + x - 11 = 0,\quad 2y - 9x + 59 = 0,\quad 6y - 7x - 3 = 0.$$

202. Die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks sind von A (0,0), von B $(x_2, 0)$, von C (x_3, y_3); demnach ist die Gleichung des Radius

$$y = - \frac{x_2 x_3 - y_3^2 - x_3^2}{y_3 x_2} x,$$

dagegen die der Geraden, welche die Fuſspunkte der Höhen verbindet,

$$y = \frac{y_3 x_2}{x_2 x_3 - y_3^2 - x_3^2}(x - x_3).$$

Die beiden Geraden durchschneiden sich also rechtwinklig.

203. Ist die Lage des Dreiecks dieselbe wie in der vorhergehenden Aufgabe, so sind die Gleichungen der Seiten des Sechsecks:

$$y = - \frac{x_3 - x_2}{y_3}(x - x_2),\quad y = - \frac{x_3}{y_3} x,\quad x = 0,$$

$$y - y_3 = - \frac{x_3 - x_2}{y_3}(x - x_3),\quad y - y_3 = - \frac{x_3}{y_3}(x - x_3),\quad x = x_2.$$

204. Die Koordinaten des gesuchten Punktes sind $x_1 = 6$, $y_1 = 5$; der Abstand desselben von jeder der Seiten gleich $\frac{24}{\sqrt{73}}$.

205. Die Gleichungen der Seiten des eingeschriebenen Parallelogramms sind: $7y + 6x - 55 = 0$, $8y - 7x + 48 = 0$, $7y + 6x - 6{,}5 = 0$, $8y - 7x - 0{,}5 = 0$; demnach die Gleichungen der Halbierungslinien:

$$\frac{7y + 6x - 55}{\sqrt{85}} + \frac{8y - 7x + 48}{\sqrt{113}} = 0,$$

$$\frac{8y - 7x + 48}{\sqrt{113}} - \frac{7y + 6x - 6{,}5}{\sqrt{85}} = 0,$$

$$\frac{7y + 6x - 6{,}5}{\sqrt{85}} + \frac{8y - 7x - 0{,}5}{\sqrt{113}} = 0,$$

$$\frac{8y - 7x - 0{,}5}{\sqrt{113}} - \frac{7y + 6x - 55}{\sqrt{85}} = 0.$$

206. Dividiert man die gegebene Gleichung durch y^n, so ergiebt sich

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n - a\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + b\left(\frac{x}{y}\right)^{n-2} - \cdots \mp p\left(\frac{x}{y}\right) \pm q = 0.$$

Bezeichnet man ferner die n Wurzeln dieser Gleichung mit $w_1, w_2, w_3 \cdots w_n$, so ist bekanntlich

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n - a\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + b\left(\frac{x}{y}\right)^{n-2} - \cdots \mp p\left(\frac{x}{y}\right) \pm q$$

$$\equiv \left(\frac{x}{y} - w_1\right)\left(\frac{x}{y} - w_2\right)\left(\frac{x}{y} - w_3\right)\cdots\left(\frac{x}{y} - w_n\right) = 0,$$

demnach

$$x^n - ax^{n-1}y + bx^{n-2}y^2 - \cdots \mp pxy^{n-1} \pm qy^n$$

$$\equiv (x - yw_1)(x - yw_2)(x - yw_3)\cdots(x - yw_n) = 0.$$

Es entsprechen sonach der gegebenen Gleichung die n geraden Linien

$$x - yw_1 = 0,\ x - yw_2 = 0 \cdots x - yw_n = 0,$$

welche alle durch den Koordinatenanfangspunkt gehen.

207. Nach der vorigen Lösung ist

$$y^2 - ayx + bx^2 \equiv \left(y - x\cdot\frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right)\left(y - x\cdot\frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right) = 0,$$

also entsprechen der gegebenen Gleichung die beiden Geraden

$$y = x \cdot \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad y = x \cdot \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2};$$

sie gehen beide durch den Koordinatenanfangspunkt, und die Richtung jeder einzelnen ist durch den Koefficienten von x bestimmt. Die beiden Geraden sind reell für $a^2 > 4b$, sie fallen zusammen für $a^2 = 4b$, sie sind imaginär für $a^2 < 4b$.

208. $x^2 - y^2 \equiv (x + y)(x - y) = 0.$

Die beiden Geraden halbieren die Winkel, welche von den Achsen des Koordinatensystems gebildet werden.

209. $y^2 + 5xy - 14x^2 \equiv (y - 2x)(y + 7x) = 0.$
Die beiden Geraden sind also: $y - 2x = 0$, $y + 7x = 0$.

210. $y^2 - 2yx + 3x^2 \equiv \left(y - x(1 + i\sqrt{2})\right)\left(y - x(1 - i\sqrt{2})\right) = 0.$
Der gegebenen Gleichung entsprechen die beiden imaginären Geraden

$$y - x\left(1 + i\sqrt{2}\right) = 0, \; y - x\left(1 - i\sqrt{2}\right) = 0,$$

deren reeller Duchschnittspunkt der Koordinatenanfangspunkt ist.

211. $2y^3 - 11y^2x + 4yx^2 + 5x^3 \equiv (2y + x)(y - x)(y - 5x) = 0.$
Die gegebene Gleichung repräsentiert demnach die drei Geraden

$$2y + x = 0, \; y - x = 0, \; y - 5x = 0.$$

212. Da

$$3y^3 - 22y^2x + 5yx^2 + 14x^3 \equiv (y - 7x)(3y + 2x)(y - x) = 0$$

ist, so sind die Koordinaten der Schnittpunkte:

$$x_1 = \tfrac{5}{31}, \; y_1 = 1\tfrac{4}{31}; \; x_2 = 15, \; y_2 = -10; \; x_3 = \tfrac{5}{7}, \; y_3 = \tfrac{5}{7}.$$

213. Es ist

$$15x^2 + 49xy - 22y^2 \equiv (5x - 2y)(3x + 11y) = 0,$$

demnach sind die Gleichungen der gesuchten Geraden:

$$2y - 5x + 53 = 0, \; 11y + 3x + 78 = 0.$$

214. Man erhält $(6y^2 - 17yx + 5x^2) \equiv (2y - 5x)(3y - x) = 0$, demnach sind die Abstände $d_1 = \dfrac{7}{\sqrt{29}}$, $d_2 = \dfrac{9}{\sqrt{10}}$, und der Inhalt des Vierecks $= 8\tfrac{573}{580} \square$.

215. Da $Ly^2 + Mxy + Nx^2$

$$\equiv \left\{Ly + \left(\frac{M}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{M^2 - 4LN}\right)x\right\}\left\{Ly + \left(\frac{M}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{M^2 - 4LN}\right)x\right\} = 0$$

ist, so ist die Tangente des von den beiden Geraden eingeschlossenen Winkels

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{M^2 - 4LN}}{L + N}.$$

Ist $L + N = 0$, so wird $\operatorname{tg}\varphi = \infty$, d. h. die beiden Geraden stehen lotrecht zu einander.

216. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{7}{13}$; $\sphericalangle\, \varphi = 28^0\, 18'\, 2{,}7''$.

217. $\operatorname{tg}\varphi = \infty$; $\sphericalangle\, \varphi = 90^0$.

218. Die Winkelhalbierenden entsprechen der Gleichung

$$M(y^2 - x^2) - 2xy\,(L - N) = 0.$$

Da die Wurzeln dieser Gleichung stets reell sind, so folgt, dafs sich stets zwei reelle Winkelhalbierende ergeben, sogar wenn durch die ursprüngliche Gleichung ein imaginäres Geradenpaar dargestellt wird. Dafs die beiden Winkelhalbierenden lotrecht zu einander stehen, läfst sich aus dem Verhältnis der Koefficienten von x^2 und y^2 folgern. Vgl. Lös. 215.

219. Die Winkelhalbierenden entsprechen den Gleichungen

$$y = x\left(\frac{7 \pm \sqrt{208}}{13}\right).$$

220. Der gegebenen Gleichung entsprechen zwei imaginäre Gerade

$$y = x\,(1 + i\sqrt{2}),\ y = x\,(1 - i\sqrt{2}),$$

die Gleichungen der reellen Winkelhalbierenden sind:

$$y = x\,(1 + \sqrt{2}),\ y = x\,(1 - \sqrt{2}).$$

221. Die Richtungskonstante der Grundlinie wird entweder $\frac{11 + \sqrt{1802}}{41}$ oder $\frac{11 - \sqrt{1802}}{41}$ sein.

222. Entwickelt man die gegebene Gleichung nach y, so ergiebt sich

$$y = \frac{-(Bx + D) \pm \sqrt{x^2(B^2 - 4AC) + 2x(BD - 2AE) + D^2 - 4AF}}{2A}.$$

Dieser Gleichung entsprechen nur dann zwei Gerade, wenn $\frac{\varDelta}{2A} = 0$ ist, worin $\varDelta$ die Discriminante der Form unter dem Wurzelzeichen bedeutet; d. h. wenn

$$AE^2 + CD^2 + B^2F - BDE - 4ACF = 0$$

ist.

223. Bei Einsetzung der Konstanten wird die Bedingungsgleichung eine identische. Man erhält sonach

$$2y^2-xy-15x^2-13y-27x+6\equiv(2y+5x-1)(y-3x-6)=0.$$

Die Gleichungen der beiden Geraden sind also:

$$2y+5x-1=0,\ y-3x-6=0.$$

224. Wir nehmen an, es sei

$$28x^2+xy-2y^2-11x-y+1\equiv(A_1x+B_1y+1)(A_2x+B_2y+1)=0,$$

dann erhalten wir zur Bestimmung der unbekannten Konstanten die Relationen:

$$A_1A_2=28,\ A_1+A_2=-11,\ B_1B_2=-2,\ B_1+B_2=-1,$$
$$A_1B_2+A_2B_1=1.$$

Genügen die aus vier dieser Gleichungen bestimmten Wurzeln der fünften Gleichung, so werden durch die gegebene Gleichung zwei Gerade dargestellt. Wir erhalten in dem vorliegenden Falle

$$A_1=-4,\ A_2=-7,\ B_1=1,\ B_2=-2,$$

demnach sind die Gleichungen der Geraden:

$$4x-y-1=0,\ 7x+2y-1=0.$$

225. Mit Hilfe der in Lös. 222 entwickelten Bedingungsgleichung findet man zur Bestimmung von B die Relation

$$6B^2+B-51=0,$$

wonach $B_1=\frac{17}{6}$, $B_2=-3$ ist.

Für $B=\frac{17}{6}$ erhält man die beiden Geraden

$$y+\tfrac{3}{2}x+3=0,\ y+\tfrac{4}{3}x-2=0,$$

dagegen für $B=-3$ die Geraden

$$y-x-2=0,\ y-2x+3=0.$$

226. Setzt man

$$Ay^3+By^2x+Cyx^2+Dx^3+Ey^2+Fxy+Gx^2+Hy+Kx+1$$
$$\equiv(A_1y+B_1x-1)(A_2y+B_2x-1)(A_3y+B_3x-1)=0,$$

so lassen sich 9 Relationen entwickeln, in denen die Unbekannten $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ auftreten. Da zur Bestimmung der letzteren 6 dieser Relationen ausreichen, so bleiben noch 3 übrig, denen die Konstanten der gegebenen Gleichung genügen müssen.

227. Die Gleichungen der geraden Linien sind:

$$2y-3x+1=0,\ 4y+x-1=0,\ y-x+1=0.$$

228. Soll die gegebene Gleichung vier parallele Gerade repräsentieren, so mufs

$$y^4 + Ay^3x + \dots + Py + Qx + R$$
$$\equiv (y - M_1x + n_1)(y - M_1x + n_2)(y - M_1x + n_3)(y - M_1x + n_4) = 0$$

sein, woraus sich durch Gleichsetzung der Koefficienten gleich hoher Potenzen der Variabeln 14 Gleichungen ergeben. Da zur Bestimmung der Unbekannten M_1, n_1, n_2, n_3, n_4 5 Gleichungen ausreichen, so bleiben noch 9, denen die Koefficienten der gegebenen Gleichung genügen müssen.

229. Die gegebene Gleichung ist bekanntlich die einer Geraden G, welche durch den Schnittpunkt der beiden Fundamentalgeraden

$$x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1 - p_1 = 0 \quad \text{und} \quad x\cos\varphi_2 + y\sin\varphi_2 - p_2 = 0$$

geht. Da nun

$$k = \frac{x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1 - p_1}{x\cos\varphi_2 + y\sin\varphi_2 - p_2}$$

ist, worin x, y die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Geraden G sind, so ersieht man, dafs k gleich dem Verhältnis der Lote ist, welche sich von einem beliebigen Punkte der Geraden G auf die beiden Fundamentalgeraden fällen lassen, oder auch gleich dem Verhältnis der Sinusse der Winkel, welche die Gerade G mit den beiden Fundamentalgeraden einschliefst. Besitzt k einen positiven Wert, so teilt die Gerade G den Winkel α der Fundamentalgeraden, in welchem der Koordinatenanfangspunkt liegt, besitzt es dagegen einen negativen Wert, so geht die Gerade G durch den Nebenwinkel des Winkels α.

230. Nach der vorhergehenden Lösung findet man leicht, dafs

$$k = \frac{L_1x + M_1y + N_1}{L_2x + M_2y + N_2} = \frac{\sqrt{L_1^2 + M_1^2}}{\sqrt{L_2^2 + M_2^2}} \cdot \frac{\dfrac{L_1x + M_1y + N_1}{\sqrt{L_1^2 + M_1^2}}}{\dfrac{L_2x + M_2y + N_2}{\sqrt{L_2^2 + M_2^2}}}$$
$$= \frac{\sqrt{L_1^2 + M_1^2}}{\sqrt{L_2^2 + M_2^2}} \cdot \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\sqrt{L_1^2 + M_1^2}}{\sqrt{L_2^2 + M_2^2}} \cdot \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}.$$

Multipliziert man also die Gröfse k mit der Konstanten $\dfrac{\sqrt{L_2^2 + M_2^2}}{\sqrt{L_1^2 + M_1^2}}$, so ist das Produkt gleich dem Verhältnis der Abstände eines

Punktes der Geraden G von den beiden Fundamentalgeraden, oder gleich dem Verhältnis der Sinusse der Winkel, welche die Gerade G mit den Fundamentalgeraden einschliefst.

231. Die Gleichung des Lotes auf der Geraden $V_1 = 0$ ist $V_1 \cos\alpha + V_2 = 0$, die des Lotes auf $V_2 = 0$ dagegen

$$V_1 + V_2 \cos\alpha = 0.$$

232. Die beiden Geraden $V_1 - kV_2 = 0$ und $V_1 + kV_2 = 0$ teilen die Winkel der Fundamentallinien in gleichem Verhältnis.

233. Durch Addition der beiden Gleichungen $V_1 - kV_2 = 0$ $kV_1 - V_2 = 0$ erhält man $V_1(1+k) - V_2(1+k) = 0$, d. h. die beiden Geraden $V_1 - kV_2 = 0$, $kV_1 - V_2 = 0$ liegen symmetrisch zu der Geraden $V_1 - V_2 = 0$, oder die Halbierungslinie des Winkels der Fundamentallinien halbiert zugleich einen Winkel, den die beiden Geraden $V_1 - kV_2 = 0$, $kV_1 - V_2 = 0$ einschliefsen.

234. Die Gleichungen der Transversalen sind:

$$V_1 \sin\alpha_1 - V_2 \sin\alpha_2 = 0,\ V_2 \sin\alpha_2 - V_3 \sin\alpha_3 = 0,\ V_3 \sin\alpha_3 - V_1 \sin\alpha_1 = 0.$$

Da die Gleichung

$$V_1 \sin\alpha_1 - V_2 \sin\alpha_2 + V_2 \sin\alpha_2 - V_3 \sin\alpha_3 + V_3 \sin\alpha_3 - V_1 \sin\alpha_1 = 0$$

eine identische ist, so müssen die drei Transversalen durch einen Punkt gehen.

235. Die Gleichungen der Höhen sind:

$$V_1 \cos\alpha_1 - V_2 \cos\alpha_2 = 0,\ V_2 \cos\alpha_2 - V_3 \cos\alpha_3 = 0,\ V_3 \cos\alpha_3 - V_1 \cos\alpha_1 = 0.$$

Da die Summe der linken Seiten dieser Gleichungen gleich Null ist, so schneiden sich die Höhen in einem Punkte.

236. Die Gleichungen der Halbierungslinien der Innenwinkel des Dreiecks sind:

$$V_1 - V_2 = 0,\ V_2 - V_3 = 0,\ V_3 - V_1 = 0,$$

die der Halbierungslinien der Aufsenwinkel:

$$V_1 + V_2 = 0,\ V_2 + V_3 = 0,\ V_3 + V_1 = 0.$$

Da die Gleichungen

$$\begin{aligned}
V_1 - V_2 + V_2 - V_3 + V_3 - V_1 &= 0,\\
V_1 + V_2 - (V_2 + V_3) + V_3 - V_1 &= 0,\\
V_2 + V_3 - (V_3 + V_1) + V_1 - V_2 &= 0,\\
V_3 + V_1 - (V_1 + V_2) + V_2 - V_3 &= 0
\end{aligned}$$

identische sind, so folgt, daſs sich die Halbierungslinien der Innenwinkel eines Dreiecks in einem Punkte schneiden, ferner daſs auch die Halbierungslinien je zweier Auſsenwinkel und des gegenüberliegenden Innenwinkels durch einen Punkt gehen.

237. Die Gleichungen der Transversalen sind:

$$V_1 \sin^2 \frac{\alpha_1}{2} - V_2 \sin^2 \frac{\alpha_2}{2} = 0,\ V_2 \sin^2 \frac{\alpha_2}{2} - V_3 \sin^2 \frac{\alpha_3}{2} = 0,$$

$$V_3 \sin^2 \frac{\alpha_3}{2} - V_1 \sin^2 \frac{\alpha_1}{2} = 0.$$

Die Summation dieser Gleichungen liefert das Resultat $0 = 0$.

238. Da die Gleichungen der Ecktransversalen

$$V_1 \cos^2 \frac{\alpha_1}{2} - V_2 \cos^2 \frac{\alpha_2}{2} = 0,\ V_2 \cos^2 \frac{\alpha_2}{2} - V_3 \cos^2 \frac{\alpha_3}{2} = 0,$$

$$V_3 \cos^2 \frac{\alpha_3}{2} - V_1 \cos^2 \frac{\alpha_1}{2} = 0$$

sind, so läſst sich der Beweis mit Leichtigkeit führen.

239. Soll den beiden Gleichungen

$$V_1 + k_1 V_2 + h(V_1 + k_2 V_2) = 0 \text{ und } V_1 + r V_2 = 0$$

dieselbe Gerade entsprechen, so muſs

$$r = \frac{k_1 + hk_2}{1 + h}, \text{ also } h = -\frac{r - k_1}{r - k_2} \text{ sein.}$$

240. Es ist zunächst zu zeigen, daſs die gegebenen Geraden dem Strahlenbüschel $5x - 7y + 3 + k(2x + 3y - 1)$ angehören. Zu diesem Zwecke setzt man

$$k_1(7x - 4y + 2) \equiv 5x - 7y + 3 + k(2x + 3y - 1) = 0$$

und erhält zur Bestimmung der Gröſsen k_1 und k die Relationen

$$7k_1 = 5 + 2k,\ -4k_1 = -7 + 3k,\ 2k_1 = 3 - k.$$

Allen drei Gleichungen genügen die Werte $k_1 = 1$, $k = 1$. Es ist also

$$(7x - 4y + 2) \equiv 5x - 7y + 3 + 1\,(2x + 3y - 1) = 0.$$

Ferner erhält man

$$19x + 14y - 4 \equiv 5x - 7y + 3 + 7\,(2x + 3y - 1) = 0$$

und

$$3x - 10y + 4 \equiv 5x - 7y + 3 - 1\,(2x + 3y - 1) = 0.$$

Da nun

$$f(3x - 10y + 4) \equiv (7x - 4y + 2) + h(19x + 14y - 4) = 0$$

sein soll, so erhält man zur Bestimmung von f und h die Gleichungen

$$3f = 7 + 19h, \quad -10f = -4 + 14h, \quad 4f = 2 - 4h,$$

woraus sich
$$f = \tfrac{3}{4}, \; h = -\tfrac{1}{4}$$
ergeben. Also ist

$$\tfrac{3}{4}(3x - 10y + 4) \equiv (7x - 4y + 2) - \tfrac{1}{4}(19x + 14y - 4) = 0.$$

241. Die Gleichung des vierten Strahles ist

$$L_1 + \frac{k_1}{f} L_2 = 0.$$

Beispiel. Es ist $k_1 = -3$, demnach $k_2 = -\frac{8}{3}$, also die Gleichung des vierten Strahles

$$3x - 15\tfrac{1}{3}y + 23 = 0.$$

242. Setzt man

$$f(L_1 + h_1 L_2) \equiv L_1 + k_1 L_2 + r_1(L_1 + k_2 L_2) = 0,$$
$$g(L_1 + h_2 L_2) \equiv L_1 + k_1 L_2 + r_2(L_1 + k_2 L_2) = 0,$$

so erhält man den Wert des Doppelverhältnisses

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{h_1 - k_1}{h_1 - k_2} : \frac{h_2 - k_1}{h_2 - k_2}.$$

Dieser Quotient wird kurz durch das Symbol $(k_1 k_2;\ h_1 h_2)$ bezeichnet.

243. Man findet

$$k_1 = 3, \; k_2 = -2, \; h_1 = 1, \; h_2 = 5,$$

demnach ist

$$(k_1 k_2;\ h_1 h_2) = -2\tfrac{1}{3}.$$

244. Es ist

$$\frac{h_1 - k_1}{h_1 - k_2} : \frac{h_2 - k_1}{h_2 - k_2} = \frac{h_1 - k_1}{h_2 - k_1} : \frac{h_1 - k_2}{h_2 - k_2} = \frac{k_1 - h_1}{k_1 - h_2} : \frac{k_2 - h_1}{k_2 - h_2};$$

ferner

$$\frac{h_1 - k_1}{h_1 - k_2} : \frac{h_2 - k_1}{h_2 - k_2} = \frac{h_1 - k_1}{h_1 - k_2} \cdot \frac{h_2 - k_2}{h_2 - k_1} = \frac{h_2 - k_2}{h_2 - k_1} : \frac{h_1 - k_2}{h_1 - k_1};$$

endlich

$$\frac{h_1 - k_1}{h_1 - k_2} : \frac{h_2 - k_1}{h_2 - k_2} = \frac{h_2 - k_2}{h_1 - k_2} : \frac{h_2 - k_1}{h_1 - k_1} = \frac{k_2 - h_2}{k_2 - h_1} : \frac{k_1 - h_2}{k_1 - h_1};$$

also ist

$$(k_1 k_2;\; h_1 h_2) = (h_1 h_2;\; k_1 k_2) = (k_2 k_1;\; h_2 h_1) = (h_2 h_1;\; k_2 k_1).$$

Der Wert des Doppelverhältnisses von vier Strahlen eines Büschels bleibt also unverändert, wenn man entweder die beiden Strahlenpaare mit einander vertauscht, oder wenn man in jedem Paare die beiden Strahlen mit einander vertauscht.

245. Bezeichnet man den Wert des Doppelverhältnisses $(k_1 k_2;\; h_1 h_2)$ kurz mit f, so findet man

$$(k_2 k_1;\; h_1 h_2) = (k_1 k_2;\; h_2 h_1) = \frac{1}{f}.$$

Das Doppelverhältnis erhält in diesem Falle den reciproken Wert.

246. Ist $(k_1 k_2;\; h_1 h_2) = f$, so ergiebt sich

$$(k_1 h_1;\; k_2 h_2) = (h_2 k_2;\; h_1 k_1) = 1 - f.$$

247. $$(h_1 k_2;\; k_1 h_2) = (k_1 h_2;\; h_1 k_2) = \frac{f}{f-1}.$$

248. Unter Berücksichtigung der vorhergehenden Lösungen findet man, dafs die Doppelverhältnisse von vier Strahlen nur sechs verschiedene Werte besitzen können, nämlich

$$f,\; 1-f,\; \frac{f}{f-1},\; \frac{1}{f},\; \frac{1}{1-f},\; \frac{f-1}{f}.$$

249. Die Gleichung der Halbierungslinie des Winkels ist $V_1 - V_2 = 0$, die der Halbierungslinie des Nebenwinkels $V_1 + V_2 = 0$, demnach der Wert des Doppelverhältnisses gleich -1.

250. Die Halbierungslinie wird in den betreffenden Punkten von der Halbierungslinie eines Innenwinkels, sowie von der des anliegenden Aufsenwinkels geschnitten. Diese Halbierungslinien bilden aber mit den Seiten, durch deren Schnittpunkt sie gehen, ein harmonisches Strahlenbüschel.

251. Durch einfache Umformung der Relation

$$\frac{h_1 - k_1}{h_1 - k_2} : \frac{h_2 - k_1}{h_2 - k_2} = -1$$

erhält man die Bedingungsgleichung

$$h_1 h_2 - \tfrac{1}{2}(h_1 + h_2)(k_1 + k_2) + k_1 k_2 = 0.$$

252. Die Bedingungsgleichung geht in diesem Falle über in $\frac{1}{2}(k_1 - k_2)(h_2 - k_1) = 0$, also $h_2 = k_1$; d. h. fällt ein Strahl des zweiten Paares mit einem Strahle des ersten Paares zusammen,

so mufs auch der andere Strahl des zweiten Paares mit demselben Strahle des ersten Paares zusammenfallen.

253. Untersucht man zunächst, ob die Geraden des zweiten Paares durch den Schnittpunkt des ersten gehen, so findet man

$$3y + 4x - 25 + 2(2y - 3x - 11) \equiv 7y - 2x - 47 = 0,$$
$$3y + 4x - 25 - 2(2y - 3x - 11) \equiv -y + 10x - 3 = 0.$$

Der Wert des Doppelverhältnisses ist also gleich -1; d. h. die beiden Geradenpaare bilden ein harmonisches Büschel.

254. Die Gleichung zwischen den Parametern geht in diesem Falle über in

$$hh_2 + k^2 = 0,$$

also ist $L_1 - \frac{k^2}{h} L_2 = 0$ die Gleichung der vierten Harmonikalen.

255. Man erhält drei Lösungen, da man entweder die beiden ersten Geraden, oder die erste und dritte Gerade, oder die beiden letzten Graden als konjugierte Strahlen betrachten kann. Bezeichnet man die Gleichung der gesuchten Geraden mit $L_1 + kL_2 = 0$, so erhält man zur Bestimmung von k im ersten Falle die Gleichung

$$k_1 k_2 - \tfrac{1}{2}(k_3 + k)(k_1 + k_2) + k_3 k = 0,$$

im zweiten Falle

$$k_1 k_3 - \tfrac{1}{2}(k_2 + k)(k_1 + k_3) + k_2 k = 0,$$

im dritten Falle

$$k_2 k_3 - \tfrac{1}{2}(k_1 + k)(k_2 + k_3) + k_1 k = 0.$$

256. Es ist

$$2x + 5y - 8 - 1(5x + y - 16) \equiv (-1)(3x - 4y - 8) = 0,$$

demnach die Gleichung des der dritten Geraden konjugierten Strahles

$$2x + 5y - 8 + 1(5x + y - 16) \equiv 7x + 6y - 24 = 0;$$

ferner findet man die Gleichung des Strahles, welcher der zweiten Geraden konjugiert ist,

$$9y - x = 0,$$

und die Gleichung des der ersten Geraden konjugierten Strahles

$$8x - 3y - 24 = 0.$$

257. Bezeichnet man die Gleichungen der gegebenen Strahlen mit $L_1 + k_1 L_2 = 0$, $L_1 + k_2 L_2 = 0$, $L_1 + k_3 L_2 = 0$, so erhält man die Werte $k_1 = -5$, $k_2 = 3$, $k_3 = 1$. Zur Bestimmung von

k lassen sich demnach die folgenden drei Gleichungen aufstellen (vergl. Lösung 255)

$$\begin{aligned} -15 + (1+k) + k &= 0, \\ -5 + 2(3+k) + 3k &= 0, \\ 3 - 2(k-5) - 5k &= 0, \end{aligned}$$

woraus sich die Werte $7, -\frac{1}{5}, \frac{13}{7}$ ergeben. Die Gleichungen der gesuchten Geraden sind also:

$$\begin{aligned} 51x - 11y + 2 &= 0, \\ 3x + 17y - 26 &= 0, \\ 105x - 5y - 22 &= 0. \end{aligned}$$

258. Die Gleichungen der harmonischen Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte die Eckpunkte des Dreiecks sind, haben folgende Gestalt:

1) $V_1=0,\ V_2=0;\ V_1\sin\alpha_1 - V_2\sin\alpha_2=0,\ V_1\sin\alpha_1 + V_2\sin\alpha_2=0.$

2) $V_2=0,\ V_3=0;\ V_2\sin\alpha_2 - V_3\sin\alpha_3=0,\ V_2\sin\alpha_2 + V_3\sin\alpha_3=0.$

3) $V_3=0,\ V_1=0;\ V_3\sin\alpha_3 - V_1\sin\alpha_1=0,\ V_3\sin\alpha_3 + V_1\sin\alpha_1=0.$

Dagegen sind die Gleichungen der Geraden, welche mit den drei Schwerpunktstransversalen harmonische Strahlenbüschel bilden:

$$\begin{aligned} V_1 \sin\alpha_1 - 2V_2\sin\alpha_2 + V_3\sin\alpha_3 &= 0, \\ V_2 \sin\alpha_2 - 2V_3\sin\alpha_3 + V_1\sin\alpha_1 &= 0, \\ V_3 \sin\alpha_3 - 2V_1\sin\alpha_1 + V_2\sin\alpha_2 &= 0. \end{aligned}$$

259. Die Gleichungen der Höhen des Dreiecks sind:

$$V_1\cos\alpha_1 - V_2\cos\alpha_2 = 0,\quad V_2\cos\alpha_2 - V_3\cos\alpha_3 = 0,$$
$$V_3\cos\alpha_3 - V_1\cos\alpha_1 = 0,$$

demnach die Gleichungen der gesuchten vierten Harmonikalen:

$$\begin{aligned} V_1 \cos\alpha_1 - 2V_2\cos\alpha_2 + V_3\cos\alpha_3 &= 0, \\ V_2 \cos\alpha_2 - 2V_3\cos\alpha_3 + V_1\cos\alpha_1 &= 0, \\ V_3 \cos\alpha_3 - 2V_1\cos\alpha_1 + V_2\cos\alpha_2 &= 0. \end{aligned}$$

260. Mit Hilfe der Lösung 237 findet man die Gleichungen der vierten Harmonikalen:

$$\begin{aligned} V_1\sin^2\frac{\alpha_1}{2} - 2V_2\sin^2\frac{\alpha_2}{2} + V_3\sin^2\frac{\alpha_3}{2} &= 0, \\ V_2\sin^2\frac{\alpha_2}{2} - 2V_3\sin^2\frac{\alpha_3}{2} + V_1\sin^2\frac{\alpha_1}{2} &= 0, \\ V_3\sin^2\frac{\alpha_3}{2} - 2V_1\sin^2\frac{\alpha_1}{2} + V_2\sin^2\frac{\alpha_2}{2} &= 0. \end{aligned}$$

261. Da sich aus der Gleichung

$$h_1 h_2 - \tfrac{1}{2}(h_1 + h_2)(k_1 + k_2) + k_1 k_2 = 0$$

für jeden reellen Wert von h_1 ein entsprechender Wert von h_2 ergiebt, so werden sich unendlich viele harmonische Strahlenpaare bestimmen lassen.

262. Sind $L_1 + h_1 L_2 = 0$, $L_1 + h_2 L_2 = 0$ die Gleichungen des gesuchten Strahlenpaares, so lassen sich zur Bestimmung der unbekannten Parameter h_1, h_2 die Gleichungen

$$h_1 h_2 - \tfrac{1}{2}(h_1 + h_2)(k_1 + k_2) + k_1 k_2 = 0,$$
$$h_1 h_2 - \tfrac{1}{2}(h_1 + h_2)(r_1 + r_2) + r_1 r_2 = 0$$

aufstellen. Berechnet man aus diesen Gleichungen $h_1 h_2$ und $h_1 + h_2$, so ersieht man leicht, dafs h_1 und h_2 Wurzeln einer quadratischen Gleichung sind. Es kann also nur ein einziges Strahlenpaar gefunden werden, welches mit jedem der gegebenen Paare ein harmonisches Büschel bildet. Dieses Strahlenpaar wird als ein reelles oder imaginäres bezeichnet, je nachdem die Werte von h_1 und h_2 reell oder imaginär sind.

263. Es ist

$$2y + 3x - 23 \equiv 3(2y - x - 11) - 2(2y - 3x - 5) = 0,$$
$$4(y + x - 10) \equiv 5(2y - x - 11) - 3(2y - 3x - 5) = 0,$$

also lassen sich zur Bestimmung von h_1 und h_2 die Gleichungen

$$\frac{h_1}{h_2} = -1, \ \frac{h_1 + \frac{2}{3}}{h_1 + \frac{3}{5}} : \frac{h_2 + \frac{2}{3}}{h_2 + \frac{3}{5}} = -1$$

aufstellen, woraus

$$h_1 = \pm\sqrt{\tfrac{2}{5}}, \ h_2 = \mp\sqrt{\tfrac{2}{5}}.$$

Die gesuchten Gleichungen sind sonach:

$$(2y - x - 11) + \sqrt{\tfrac{2}{5}}(2y - 3x - 5) = 0,$$
$$(2y - x - 11) - \sqrt{\tfrac{2}{5}}(2y - 3x - 5) = 0.$$

264. Da

$$-12y + 25x - 11 \equiv 2y + 3x - 5 - 2(7y - 11x + 3) = 0,$$
$$37y - 52x + 10 \equiv 2y + 3x - 5 + 5(7y - 11x + 3) = 0,$$

so erhält man zur Bestimmung von h_1 und h_2 die Relationen

$$\frac{h_1}{h_2} = -1, \ \frac{h_1 + 2}{h_1 - 5} : \frac{h_2 + 2}{h_2 - 5} = -1.$$

Die Gleichungen des gesuchten Strahlenpaares sind demnach:

$$2y + 3x - 5 + i\sqrt{10}\,(7y - 11x + 3) = 0,$$
$$2y + 3x - 5 - i\sqrt{10}\,(7y - 11x + 3) = 0.$$

Beide Strahlen sind imaginär.

265. Nehmen wir an, dafs die Gleichungen des vierten Strahlenpaares, welches mit jedem der gegebenen ein harmonisches Büschel bildet, $L_1 + k_1 L_2 = 0$, $L_1 + k_2 L_2 = 0$ seien, so lassen sich nach Lösung 262 folgende Gleichungen aufstellen:

$$h_1 h_2 - \tfrac{1}{2}(h_1 + h_2)(k_1 + k_2) + k_1 k_2 = 0,$$
$$h_3 h_4 - \tfrac{1}{2}(h_3 + h_4)(k_1 + k_2) + k_1 k_2 = 0,$$
$$h_5 h_6 - \tfrac{1}{2}(h_5 + h_6)(k_1 + k_2) + k_1 k_2 = 0.$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen $\tfrac{1}{2}(k_1 + k_2)$ und $k_1 k_2$, so erhält man die Bedingungsgleichung, welcher die Parameter h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6 genügen müssen, nämlich

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ h_1 + h_2 & h_3 + h_4 & h_5 + h_6 \\ h_1 h_2 & h_3 h_4 & h_5 h_6 \end{vmatrix} = 0.$$

266. Man findet

$$h_1 = 3,\ h_2 = -1,\ h_3 = 5,\ h_4 = 2,\ h_5 = 1,\ h_6 = 3{,}5.$$

Da nun $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 4{,}5 \\ -3 & 10 & 3{,}5 \end{vmatrix} = 0$ ist, so befinden sich die drei Strahlenpaare in Involution.

267. Da in diesem Falle $h_1 = 0$, $h_2 = \infty$ ist, so geht die in der Lösung 265 gefundene Bedingungsgleichung über in $f_1 f_2 - r_1 r_2 = 0$.

268. Betrachtet man die beiden ersten Geraden als Fundamentalstrahlen des Büschels, so findet man $f_1 = 3$, $f_2 = 8$, $r_1 = 4$, $r_2 = 6$. Die drei Strahlenpaare befinden sich also in Involution.

269. Mit Hilfe der gegebenen Relation findet man leicht $k_2 = 13$, $k_2' = -5$, $k_2'' = 2{,}5$; demnach sind die Gleichungen der Strahlenpaare:

$$\begin{cases} 27x + y - 2 = 0, \\ 67x + 9y - 10 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 17x - y = 0, \\ 23x + 9y - 8 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x + 6y - 5 = 0, \\ 29x - 3y + 1 = 0. \end{cases}$$

270. Man kann annehmen, dafs die Involution durch die Relation

$$k_1 k_2 - a(k_1 + k_2) + b = 0$$

bestimmt ist, und ersieht leicht, dafs einem Werte von k_1 nur ein ganz bestimmter Wert von k_2 entspricht, dafs ferner eine Veränderung der Relation nicht eintritt, wenn man k_1 und k_2 mit einander vertauscht.

271. Bezeichnet man die Gleichung des gesuchten Strahles mit $L_1 + r_2 L_2 = 0$, so läfst sich die Gröfse r_2 eindeutig durch die Relation

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1 + k_2 & h_1 + h_2 & r_1 + r_2 \\ k_1 k_2 & h_1 h_2 & r_1 r_2 \end{vmatrix} = 0$$

bestimmen.

272. Betrachten wir die beiden ersten Geraden als Fundamentalstrahlen des Büschels, so finden wir

$$k_1 = 0,\ k_2 = \infty;\ h_1 = 2{,}5,\ h_2 = 4;\ r_1 = 2,\ r_2 = 5;$$

demnach ist die Gleichung des sechsten Strahles

$$31x + 23y + 22 = 0.$$

273. Nach Lösung 262 findet man leicht die Gleichungen der beiden Strahlen

$$5x + y - 11 + 2\sqrt{6}\,(3x - 2y + 1) = 0,$$

$$5x + y - 11 - 2\sqrt{6}\,(3x - 2y + 1) = 0.$$

274. Nach Lösung 265 genügen die Parameter h_1 und h_2 zweier entsprechenden Strahlen der Involution der Relation

$$h_1 h_2 - \tfrac{1}{2}(h_1 + h_2)(k_1 + k_2) + k_1 k_2 = 0,$$

wenn k_1 und k_2 die Parameter der harmonischen Strahlen sind. Um die Parameter der Doppelstrahlen zu finden, setzt man $h_1 = h_2 = h$ und erhält

$$h^2 - (k_1 + k_2)h + k_1 k_2 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$h = k_1 \text{ und } h = k_2.$$

Daraus folgt: In einem involutorischen Strahlenbüschel können nur zwei Doppelstrahlen vorkommen und zwar fallen dieselben mit den beiden Geraden zusammen, welche mit jedem Strahlenpaare der Involution ein harmonisches Büschel bilden.

275. Die Parameter r_1 und r_2 der beiden Doppelstrahlen sind die Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1 + k_2 & h_1 + h_2 & 2r \\ k_1 k_2 & h_1 h_2 & r^2 \end{vmatrix} = 0.$$

276. Da hier $h_1 = 3$, $h_2 = -1$, $h_3 = 5$, $h_4 = 2$ ist, so erhält man zur Bestimmung der Parameter der Doppelstrahlen die Relation

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 2r \\ -3 & 10 & r^2 \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$5r^2 - 26r + 41 = 0,$$

woraus sich $r_1 = \frac{13 + 6i}{5}$, $r_2 = \frac{13 - 6i}{5}$ ergeben. Die Doppelstrahlen sind also imaginär und entsprechen den Gleichungen

$$5x - 3y + 2 + \frac{13 + 6i}{5}(x + 2y - 1) = 0,$$

$$5x - 3y + 2 + \frac{13 - 6i}{5}(x + 2y - 1) = 0.$$

277. Betrachten wir die beiden ersten Strahlen als Fundamentalstrahlen des Büschels, so sind die Parameter:

$$h_1 = 0,\ h_2 = \infty;\ h_3 = 2,\ h_4 = 5;$$

demnach ist $r_1 = +\sqrt{10}$, $r_2 = -\sqrt{10}$.

Die Gleichungen der beiden reellen Doppelstrahlen sind sonach:

$$11x - 2y + 7 + \sqrt{10}\,(4x + 5y + 3) = 0,$$

$$11x - 2y + 7 - \sqrt{10}\,(4x + 5y + 3) = 0.$$

278. Sind k_1 und k_2 die Parameter der beiden gegebenen Doppelstrahlen, so reicht zur Bestimmung entsprechender Strahlen des involutorischen Büschels die Relation

$$h_1 h_2 - \tfrac{1}{2}(h_1 + h_2)(k_1 + k_2) + k_1 k_2 = 0$$

aus.

279. Die Parameter der beiden Doppelstrahlen sind:

$$k_1 = 3,\ k_2 = 4.$$

Da ferner der Parameter des gegebenen Strahles $h_1 = 1$ ist, so ergiebt sich

$$h_2 = \tfrac{17}{5}.$$

Die gesuchte Gleichung ist daher

$$59x + 16y - 2 = 0.$$

280. Je zwei entsprechende Strahlen liegen symmetrisch zu den beiden Doppelstrahlen; d. h. die Winkel je zweier entsprechenden Strahlen werden von den Doppelstrahlen halbiert.

281. Ist k_1 der Parameter der beiden zusammenfallenden Doppelstrahlen, so ist die Relation

$$k_1^{\,2} - k_1(h_1 + h_2) + h_1 h_2 = 0.$$

Entwickelt man diese nach h_1 oder h_2, so findet man, daſs eine dieser Gröſsen gleich k_1 sein muſs, während die andere jeden beliebigen Wert besitzen kann. Liegen demnach die Doppelstrahlen eines involutorischen Strahlenbüschels in einer Geraden, so wird ein Strahl von jedem Paare mit dieser Geraden zusammenfallen.

282. Die gesuchten Strahlen halbieren die Winkel der beiden Doppelstrahlen. Die Gleichungen der Doppelstrahlen sind:

$$y\left(2 + 2\sqrt{\tfrac{2}{5}}\right) - x\left(1 + 3\sqrt{\tfrac{2}{5}}\right) - 11 - 5\sqrt{\tfrac{2}{5}} = 0,$$

$$y\left(2 - 2\sqrt{\tfrac{2}{5}}\right) - x\left(1 - 3\sqrt{\tfrac{2}{5}}\right) - 11 + 5\sqrt{\tfrac{2}{5}} = 0,$$

demnach die Gleichungen der lotrechten Strahlen, welche sich gegenseitig entsprechen,

$$\frac{y\left(2 + 2\sqrt{\tfrac{2}{5}}\right) - x\left(1 + 3\sqrt{\tfrac{2}{5}}\right) - 11 - 5\sqrt{\tfrac{2}{5}}}{\sqrt{10\tfrac{1}{5} + 14\sqrt{\tfrac{2}{5}}}}$$

$$\pm \frac{y\left(2 - 2\sqrt{\tfrac{2}{5}}\right) - x\left(1 - 3\sqrt{\tfrac{2}{5}}\right) - 11 + 5\sqrt{\tfrac{2}{5}}}{\sqrt{10\tfrac{1}{5} - 14\sqrt{\tfrac{2}{5}}}} = 0.$$

283. Bezeichnen wir die Parameter der beiden gesuchten Strahlen mit h_1, h_2, so lassen sich zur Bestimmung derselben die beiden Gleichungen

$$h_1 h_2 - a_1(h_1 + h_2) + b_1 = 0$$

$$h_1 h_2 - a_2(h_1 + h_2) + b_2 = 0,$$

aufstellen, in denen a_1 und b_1 von k_1, k_2, k_3, k_4, dagegen a_2 und

b_2 von r_1, r_2, r_3, r_4 abhängig sind. Die Auflösung der Gleichungen führt zu dem Resultate, daſs nur ein Strahlenpaar existiert, welches der gestellten Anforderung genügt.

284. Da

$$A_1(x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1) + A_2(x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2)$$
$$+ A_3(x\cos\alpha_3 + y\sin\alpha_3 - p_3) \equiv x\cos\varphi + y\sin\varphi - \delta = 0$$

sein muſs, so ergeben sich zur Bestimmung von A_1, A_2, A_3 die Relationen

$$A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2 + A_3\cos\alpha_3 = \cos\varphi,$$
$$A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2 + A_3\sin\alpha_3 = \sin\varphi,$$
$$A_1 p_1 + A_2 p_2 + A_3 p_3 = \delta,$$

aus denen sich die gesuchten Werte leicht ermitteln lassen, nämlich

$$A_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \cos\varphi & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \sin\varphi & \sin\alpha_2 & \sin\alpha_3 \\ \delta & p_2 & p_3 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\varphi & \cos\alpha_3 \\ \sin\alpha_1 & \sin\varphi & \sin\alpha_3 \\ p_1 & \delta & p_3 \end{vmatrix},$$

$$A_3 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\varphi \\ \sin\alpha_1 & \sin\alpha_2 & \sin\varphi \\ p_1 & p_2 & \delta \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \sin\alpha_1 & \sin\alpha_2 & \sin\alpha_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix}.$$

285. Die Höhen des Fundamentaldreiecks mögen mit h_1, h_2, h_3, die Abstände der Ecken desselben von der Geraden

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

mit d_1, d_2, d_3 bezeichnet werden. Setzt man in den Ausdruck $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Fundamentallinien $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ ein, so ist der Wert desselben gleich d_1 dem Abstand dieses Punktes von der Geraden $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ multipliziert mit einer Konstanten k. Da aber in diesem Falle $x_1 = h_1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ ist, so ergiebt sich

$$a_1h_1 = kd_1.$$

In entsprechender Weise findet man $a_2h_2 = kd_2$, $a_3h_3 = kd_3$, also ist

$$a_1 : a_2 : a_3 = \frac{d_1}{h_1} : \frac{d_2}{h_2} : \frac{d_3}{h_3},$$

$$\frac{1}{k}(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) \equiv \frac{d_1}{h_1}x_1 + \frac{d_2}{h_2}x_2 + \frac{d_3}{h_3}x_3 = 0.$$

286. Zur Bestimmung der Konstanten a_1, a_2, a_3 erhält man die Gleichungen:

$$5a_1 + 2a_2 + a_3 = 1, \ -2a_1 - a_2 + a_3 = 2,$$
$$a_1 - 3a_2 + a_3 = -4;$$

demnach ist die gesuchte Gleichung:

$$-\tfrac{20}{23}X_1 + \tfrac{39}{23}Y_1 + \tfrac{45}{23}Z_1 = 0.$$

287. Sind l_1, l_2, l_3 die Längen der Seiten, h_1, h_2, h_3 die Höhen des Fundamentaldreiecks, so ist

$$\tfrac{1}{2}(l_1x_1' + l_2x_2' + l_3x_3') = J, \text{ oder } \frac{x_1'}{h_1} + \frac{x_2'}{h_2} + \frac{x_3'}{h_3} = 1.$$

288. Beiden Gleichungen müssen gerade Linien entsprechen. Da nun für jeden endlichen Punkt

$$l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3 = 2J,$$
$$x_1 \sin\alpha_1 + x_2 \sin\alpha_2 + x_3 \sin\alpha_3 = \frac{2J\sin\alpha_1}{l_1}$$

ist, so kann kein endlicher Punkt auf den betreffenden Geraden liegen. Den beiden Gleichungen entspricht demnach die unendlich ferne Gerade.

289. Die Lage der Schnittpunkte ist bestimmt durch die Relationen:

$$x_1 = 0, \ a_2x_2 + a_3x_3 = 0, \ l_2x_2 + l_3x_3 = 2J;$$
$$x_2 = 0, \ a_1x_1 + a_3x_3 = 0, \ l_1x_1 + l_3x_3 = 2J;$$
$$x_3 = 0, \ a_1x_1 + a_2x_2 = 0, \ l_1x_1 + l_2x_2 = 2J.$$

290. Die Lage des Schnittpunktes ist bestimmt durch die Relationen:

$$x_1 : x_2 : x_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_2' & a_3' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_3' & a_1' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{vmatrix}, \ l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3 = 2J.$$

291. Bezeichnet man die gesuchte Gleichung durch

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

so erhält man zur Berechnung der unbekannten Quotienten $\frac{a_1}{a_3}$, $\frac{a_2}{a_3}$ die beiden Relationen

$$a_1x_1' + a_2x_2' + a_3x_3' = 0, \ a_1x_1'' + a_2x_2'' + a_3x_3'' = 0.$$

Als Gleichung der Geraden AB findet man demnach

$$(x_2'x_3'' - x_3'x_2'')x_1 + (x_3'x_1'' - x_1'x_3'')x_2 + (x_1'x_2'' - x_2'x_1'')x_3 = 0.$$

292. $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + k(a_1'x_1 + a_2'x_2 + a_3'x_3) = 0$
oder $(a_1 + ka_1')x_1 + (a_2 + ka_2')x_2 + (a_3 + ka_3')x_3 = 0.$
Vergl. Lös. 99.

293. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1' & a_2' & a_3' \\ a_1'' & a_2'' & a_3'' \end{vmatrix} = 0.$ Vergl. Lös. 51.

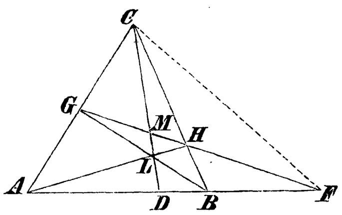
294. Die Gleichung der Geraden, welche durch den Punkt
$x_1 = 0,\ x_2 = 0$ geht, ist $x_2'x_1 - x_1'x_2 = 0,$
$x_2 = 0,\ x_3 = 0$ „ „ $x_3'x_2 - x_2'x_3 = 0,$
$x_3 = 0,\ x_1 = 0$ „ „ $x_1'x_3 - x_3'x_1 = 0.$

295. Die Gleichungen der Verbindungslinien sind:
$$a_2x_2 + a_3x_3 = 0,\ a_1x_1 + a_3x_3 = 0.$$
Den Schnittpunkt findet man durch
$$x_2 : x_3 = -a_3 : a_2,\ x_1 : x_3 = -a_3 : a_1,\ l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3 = 2J.$$

296. Die Gleichungen der Diagonalen sind:
$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,\ a_1x_1 - a_2x_2 = 0,\ x_3 = 0.$$
Für die Schnittpunkte derselben gelten aufser $l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3 = 2J$
für den ersten die Relationen $x_1 : x_2 = a_2 : a_1,\ x_1 : x_3 = -a_3 : 2a_1;$
„ „ zweiten „ „ $x_3 = 0,\ \ x_1 : x_2 = a_2 : a_1;$
„ „ dritten „ „ $x_3 = 0,\ \ x_1 : x_2 = -a_2 : a_1.$

297. Fafst man $x_3 = 0$ als Diagonale auf, so erhält man
$x_1 = 0,\ x_2 = 0;\ x_1 : x_2 : x_3 = x_1' : x_2' : x_3',\ l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3 = 2J;$
$x_1 = 0,\ x_2 : x_3 = x_2' : x_3',\ l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3 = 2J;$
$x_2 = 0,\ x_1 : x_3 = x_1' : x_3',\ l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3 = 2J;$
$x_1 = 0,\ x_3 = 0;\ x_2 = 0,\ x_3 = 0.$

Fig. 6.



298. Es seien (s. Fig. 6) die Gleichungen von AC $x_1 = 0$, von BC $x_2 = 0$, von AB $x_3 = 0$, von GH $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, dann ist die Gleichung von CD $a_1x_1 - a_2x_2 = 0$, die von CF $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$. Die Geraden CD und CF bilden demnach mit CA und CB ein harmonisches Strahlenbüschel. Die Diagonale AB wird also in den Punkten D und F und die Dia-

gonale GH in den Punkten M und F harmonisch geteilt. Verbindet man A mit M, so ergiebt sich, dafs auch die Diagonale CL in M und D harmonisch geteilt wird.

299. a) Die Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden mit den drei Fundamentallinien ergeben sich aus den Gleichungen:

$$a_2x_2 + a_3x_3 = 0,\ l_2x_2 + l_3x_3 = 2J;$$
$$a_1x_1 + a_3x_3 = 0,\ l_1x_1 + l_3x_3 = 2J;$$
$$a_1x_1 + a_2x_2 = 0,\ l_1x_1 + l_2x_2 = 2J$$

und lassen sich zur Konstruktion verwenden.

b) Die Geraden, welche den Gleichungen

$$a_1x_1 + a_2x_2 = 0,\ a_2x_2 + a_3x_3 = 0,\ a_3x_3 + a_1x_1 = 0$$

entsprechen, sind die Ecktransversalen des Fundamentaldreiecks, welche nach den Punkten gehen, in denen die Seiten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ von der Geraden $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ geschnitten werden. Diese Ecktransversalen teilen aber die Winkel des Fundamentaldreiecks so, dafs sich die Sinus der Teile wie $-a_1:a_2$, $-a_2:a_3$, $-a_3:a_1$ verhalten. Teilt man demnach die Winkel des Dreiecks in der angegebenen Weise und verlängert die Teilungslinien, bis sie die Seiten des Dreiecks durchschneiden, so ist die Lage der Geraden durch diese drei Schnittpunkte bestimmt.

300. Die Gleichungen zweier parallelen Geraden in der Normalform sind:

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - \delta = 0,$$
$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - \delta - \delta_1 = 0.$$

Führt man homogene Koordinaten ein und benutzt dabei die in Aufg. 284 gebrauchten Ausdrücke, so erhält man für die erste Gerade $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = 0$, dagegen für die zweite

$$\left(A_1 + \frac{\delta_1 \sin(\alpha_3 - \alpha_2)}{\varDelta}\right)x_1 + \left(A_2 + \frac{\delta_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_3)}{\varDelta}\right)x_2$$
$$+ \left(A_3 + \frac{\delta_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\varDelta}\right)x_3 = 0,$$

oder wenn man die Winkel des Fundamentaldreiecks mit A, B, C bezeichnet,

$$\left(A_1 + \frac{\delta_1 \sin A}{\varDelta}\right)x_1 + \left(A_2 + \frac{\delta_1 \sin B}{\varDelta}\right)x_2 + \left(A_3 + \frac{\delta_1 \sin C}{\varDelta}\right)x_3 = 0.$$

Da nun der Ausdruck $x_1 \sin A + x_2 \sin B + x_3 \sin C$ einen konstanten Wert besitzt, nämlich $\frac{2J \sin A}{l_1}$, so folgt, dafs sich die Gleichungen zweier parallelen Geraden in homogenen Koordinaten nur durch einen konstanten Addenden unterscheiden.

301. Wir nehmen an, es seien $a_1 = \varDelta A_1$, $a_2 = \varDelta A_2$, $a_3 = \varDelta A_3$, dann ergeben sich die Gleichungen:

$$(a_1 + d\sin A)\, x_1 + (a_2 + d\sin B)\, x_2 + (a_3 + d\sin C)\, x_3 = 0,$$
$$(a_1 - d\sin A)\, x_1 + (a_2 - d\sin B)\, x_2 + (a_3 - d\sin C)\, x_3 = 0.$$

302. $(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)(x_1' \sin A + x_2' \sin B + x_3' \sin C)$
$$- (a_1 x_1' + a_2 x_2' + a_3 x_3')(x_1 \sin A + x_2 \sin B + x_3 \sin C) = 0.$$

303. $x_1 \sin A + x_2 \sin B = 0$, $x_2 \sin B + x_3 \sin C = 0$,
$x_3 \sin C + x_1 \sin A = 0$.

304. Die Gleichungen der Schwerpunkttransversalen sind:

$$x_1 \sin A - x_2 \sin B = 0,\ x_2 \sin B - x_3 \sin C = 0,$$
$$x_3 \sin C - x_1 \sin A = 0,$$

die Koordinaten des Schwerpunktes:

$$x_1 = \frac{2J}{3l_1},\ x_2 = \frac{2J}{3l_2},\ x_3 = \frac{2J}{3l_3}.$$

305. Die Gleichungen der Verbindungslinien sind:

$$-x_1 \sin A + x_2 \sin B + x_3 \sin C = 0,$$
$$x_1 \sin A - x_2 \sin B + x_3 \sin C = 0,$$
$$x_1 \sin A + x_2 \sin B - x_3 \sin C = 0.$$

Aus der Gestalt derselben geht unmittelbar hervor, dafs die Geraden den Seiten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ parallel laufen.

306. Es lassen sich hier die in Lös. 284 entwickelten Transformationsgleichungen benutzen:

$$a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2 + a_3 \cos\alpha_3 = \cos\varphi_1,$$
$$a_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\alpha_2 + a_3 \sin\alpha_3 = \sin\varphi_1,$$
$$a_1' \cos\alpha_1 + a_2' \cos\alpha_2 + a_3' \cos\alpha_3 = \cos\varphi_1',$$
$$a_1' \sin\alpha_1 + a_2' \sin\alpha_2 + a_3' \sin\alpha_3 = \sin\varphi_1'.$$

Schneiden sich die beiden gegebenen Geraden rechtwinklig, so mufs $\cos\varphi_1' \cos\varphi_1 + \sin\varphi_1' \sin\varphi_1 = 0$ sein, also ergiebt sich als Bedingungsgleichung

$$a_1 a_1' + a_2 a_2' + a_3 a_3' + (a_1 a_2' + a_2 a_1') \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$
$$+ (a_2 a_3' + a_3 a_2') \cos(\alpha_3 - \alpha_2) + (a_3 a_1' + a_1 a_3') \cos(\alpha_1 - \alpha_3) = 0,$$

oder wenn wir die Winkel des Fundamentaldreiecks A, B, C einführen,

$$a_1 a_1' + a_2 a_2' + a_3 a_3' - (a_1 a_2' + a_2 a_1') \cos C - (a_2 a_3' + a_3 a_2') \cos A$$
$$- (a_3 a_1' + a_1 a_3') \cos B = 0.$$

307. Mit Hilfe der vorhergehenden Lösung findet man

$$\begin{vmatrix} a_2 - a_3 \cos A - a_1 \cos C & a_3 - a_1 \cos B - a_2 \cos A \\ x_2' & x_3' \end{vmatrix} x_1$$
$$+ \begin{vmatrix} a_3 - a_1 \cos B - a_2 \cos A & a_1 - a_2 \cos C - a_3 \cos B \\ x_3' & x_1' \end{vmatrix} x_2$$
$$+ \begin{vmatrix} a_1 - a_2 \cos C - a_3 \cos B & a_2 - a_3 \cos A - a_1 \cos C \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} x_3 = 0.$$

308. Die Gleichungen der Höhen findet man, wenn man die betreffenden Werte in die (Lös. 307) gewonnene Gleichung einsetzt.

$$x_1 \cos A - x_2 \cos B = 0, \; x_2 \cos B - x_3 \cos C = 0,$$
$$x_3 \cos C - x_1 \cos A = 0.$$

Die Koordinaten des Höhenpunktes sind:

$$x_1 = \frac{2J \cos B \cos C}{N}, \; x_2 = \frac{2J \cos C \cos A}{N}, \; x_3 = \frac{2J \cos A \cos B}{N},$$

wo $N = l_1 \cos B \cos C + l_2 \cos C \cos A + l_3 \cos A \cos B$ ist.

309. Die Gleichungen der Seiten des Fufspunktendreiecks sind:

$$x_1 \cos A - x_2 \cos B + x_3 \cos C = 0,$$
$$x_1 \cos A + x_2 \cos B - x_3 \cos C = 0,$$
$$- x_1 \cos A + x_2 \cos B + x_3 \cos C = 0.$$

310. Die Halbierungspunkte der Seiten des Fundamentaldreiecks sind bestimmt durch die Relationen:

$$x_1 = 0, \; x_2 \sin B - x_3 \sin C = 0; \; x_2 = 0, \; x_3 \sin C - x_1 \sin A = 0;$$
$$x_3 = 0, \; x_1 \sin A - x_2 \sin B = 0.$$

Bei Einsetzung dieser Werte führt die Gleichung in Lös. 307 zu folgenden Resultaten:

$$x_1 \sin(B - C) + x_2 \sin B - x_3 \sin C = 0 \quad (\text{Lot auf } x_1 = 0),$$
$$- x_1 \sin A + x_2 \sin(C - A) + x_3 \sin C = 0 \quad (\ldots \quad x_2 = 0),$$
$$x_1 \sin A - x_2 \sin B + x_3 \sin(A - B) = 0 \quad (\ldots \quad x_3 = 0).$$

Die Koordinaten des Schnittpunktes sind:

$$x_1' = \frac{1}{k}\begin{vmatrix} 0 & \sin B & -\sin C \\ 0 & \sin(C-A) & \sin C \\ 2J & l_2 & l_3 \end{vmatrix}, \quad x_2' = \frac{1}{k}\begin{vmatrix} \sin(B-C) & 0 & -\sin C \\ -\sin A & 0 & \sin C \\ l_1 & 2J & l_3 \end{vmatrix},$$

$$x_3' = \frac{1}{k}\begin{vmatrix} \sin(B-C) & \sin B & 0 \\ -\sin A & \sin(C-A) & 0 \\ l_1 & l_2 & 2J \end{vmatrix}, \text{ wo } k = \begin{vmatrix} \sin(B-C) & \sin B & -\sin C \\ -\sin A & \sin(C-A) & \sin C \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix}$$

ist.

311. Bezeichnen wir den gesuchten Abstand mit d und ziehen durch den Punkt P eine Parallele zu der gegebenen Geraden, so erhalten wir als Gleichung derselben

$$(a_1 \pm d \sin A)\, x_1 + (a_2 \pm d \sin B)\, x_2 + (a_3 \pm d \sin C)\, x_3 = 0.$$

(Vergl. Lös. 301.)

Da diese Gleichung bei Einsetzung der Koordinaten des Punktes P zu einer identischen werden mufs, so ergiebt sich mit Hilfe derselben der Wert

$$d = \frac{a_1 x_1' + a_2 x_2' + a_3 x_3'}{x_1' \sin A + x_2' \sin B + x_3' \sin C}.$$

312. $x_1 \cos^2 \frac{A}{2} - x_2 \cos^2 \frac{B}{2} = 0,\ x_2 \cos^2 \frac{B}{2} - x_3 \cos^2 \frac{C}{2} = 0,$

$x_3 \cos^2 \frac{C}{2} - x_1 \cos^2 \frac{A}{2} = 0$; vergl. Lös. 238.

313. $x_1 \sin^2 \frac{A}{2} - x_2 \sin^2 \frac{B}{2} = 0,\ x_2 \sin^2 \frac{B}{2} - x_3 \sin^2 \frac{C}{2} = 0,$

$x_3 \sin^2 \frac{C}{2} - x_1 \sin^2 \frac{A}{2} = 0$; vergl. Lös. 237.

Der Punkt.

314. $u = \frac{b_1 - b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$, $v = -\frac{a_1 - a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$.

Beispiel. $u = -\frac{7}{41}$, $v = -\frac{4}{41}$.

315. $\frac{u_1 a_1 + v_1 b_1 + 1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}$. Vergl. Lösung 60.

316. $\frac{a_1 + a_2}{2} u + \frac{b_1 + b_2}{2} v + 1 = 0$ oder $\frac{A_1 + A_2}{2} = 0$.

Beispiel. $6u + 5v + 1 = 0$.

317. $\frac{n a_1 \pm m a_2}{n \pm m} u + \frac{n b_1 \pm m b_2}{n \pm m} v + 1 = 0$

oder $$\frac{n A_1 \pm m A_2}{n \pm m} = 0.$$

318. Der Gleichung $A_1 - A_2 = 0$ entspricht der unendlich ferne Punkt auf der Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte. Wie findet man das Resultat mit Hilfe der vorhergehenden Lösung?

319. Halbiert man den Abstand der beiden Punkte $A_2 = 0$ und $A_3 = 0$, so ist die Gleichung des Teilpunktes $\frac{A_2 + A_3}{2} = 0$. Da der Schwerpunkt den Abstand dieses Punktes und des Punktes $A_1 = 0$ im Verhältnis $1 : 2$ teilt, so ist die Gleichung desselben

$$\frac{A_1 + A_2 + A_3}{3} = 0.$$

320. Die Gleichung des vierten Eckpunktes ist $-A_1 + A_2 + A_3 = 0$, oder $A_1 - A_2 + A_3 = 0$, oder $A_1 + A_2 - A_3 = 0$, je nachdem derselbe dem ersten oder dem zweiten oder dem dritten der gegebenen Punkte gegenüberliegt.

321. $A_1 - k A_2 = 0$.

322. Bezeichnet man die Entfernung des Punktes $A_1 - k A_2 = 0$ von $A_1 = 0$ mit d_1, von $A_2 = 0$ mit d_2, so ist $d_1 : d_2 = k : 1$.

Ist k negativ, so liegt der Punkt zwischen den gegebenen Punkten, ist dagegen k positiv, so liegt er aufserhalb. Welche Lage hat der Punkt für $k = 0$, welche für $k = \infty$?

323. Es mufs $k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 \equiv 0$ sein. k_1, k_2, k_3 sind beliebige Konstante. Vergl. Lösung 107.

324. Die Gleichungen der unendlich fernen Punkte der Seiten sind:

$$A_1 - A_2 = 0,\ A_2 - A_3 = 0,\ A_3 - A_1 = 0.$$

Da $A_1 - A_2 + A_2 - A_3 + A_3 - A_1 \equiv 0$ ist, so müssen die unendlich fernen Punkte der drei Seiten in einer Geraden liegen.

325. Die Gleichungen der Teilpunkte sind:

$$A_1 - \frac{p_3}{q_3} A_2 = 0,\ A_2 - \frac{p_1}{q_1} A_3 = 0,\ A_3 - \frac{p_2}{q_2}\ A_1 = 0.$$

Da

$$A_1 - \frac{p_3}{q_3} A_2 + \frac{p_3}{q_3}\left(A_2 - \frac{p_1}{q_1} A_3\right) + \frac{p_1 p_3}{q_1 q_3}\left(A_3 - \frac{p_2}{q_2} A_1\right) \equiv 0 \text{ ist,}$$

so liegen die drei Punkte in einer geraden Linie.

326. Dem Werte $k = 3$ entspricht der Punkt

$$\tfrac{1}{2}\, u + \tfrac{13}{2}\, v + 1 = 0,$$

em Werte $k = -7$ der Punkt

$$\tfrac{19}{8}\, u + \tfrac{17}{8}\, v + 1 = 0.$$

327. Der Abstand zwischen den beiden Punkten $A_1 = 0$ und $A_2 = 0$ wird von dem Punkte $A_1 + kA_2 = 0$ im Verhältnis $k : 1$ von dem Punkte $kA_1 + A_2 = 0$ im Verhältnis $1 : k$ geteilt.

328. Es ist

$$2(4u + 2v + 1) \equiv 5u - 4v + 1 + 1(3u + 8v + 1) = 0,$$
$$-1(u + 20v + 1) \equiv 5u - 4v + 1 - 2(3u + 8v + 1) = 0,$$

demnach hat das Doppelverhältnis $\frac{k_1}{k_2}$ den Wert $-\frac{1}{2}$.

329. Man findet leicht, dafs

$$3(3\tfrac{2}{3}u + 4v + 1) \equiv 3u - 2v + 1 + 2(4u + 7v + 1) = 0$$

ist, also ergiebt sich als Gleichung des gesuchten Punktes

$$3u - 2v + 1 + 5(4u + 7v + 1) = 0$$

oder $$3\tfrac{5}{6}u + 5\tfrac{1}{2}v + 1 = 0.$$

330. Setzen wir

$$f(A_1 - h_1 A_2) \equiv A_1 - k_1 A_2 - r_1(A_1 - k_2 A_2) = 0,$$
$$g(A_1 - h_2 A_2) \equiv A_1 - k_1 A_2 - r_2(A_1 - k_2 A_2) = 0,$$

so finden wir den Wert des Doppelverhältnisses

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{h_1 - k_1}{h_1 - k_2} : \frac{h_2 - k_1}{h_2 - k_2},$$

oder in abgekürzter Form $(k_1 k_2;\ h_1 h_2)$. Vergl. Lösung 242.

331. Es ist $k_1 = -1$, $k_2 = 3$, $h_1 = \frac{3}{2}$, $h_2 = \frac{2}{3}$, demnach der Wert des Doppelverhältnisses

$$(k_1 k_2;\ h_1 h_2) = \tfrac{7}{3}.$$

332. Da $k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = \frac{2}{5}$, $h_1 = \frac{2}{3}$ ist, so ergiebt sich zur Bestimmung von h_2 die Relation

$$\frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} - \frac{2}{5}} : \frac{h_2 - \frac{1}{2}}{h_2 - \frac{2}{5}} = \tfrac{13}{16},$$

woraus $h_2 = \frac{5}{6}$ folgt. Die Gleichung des vierten Punktes ist sonach $-2u - 47v + 1 = 0$.

333. $h_1 h_2 - \frac{1}{2}(h_1 + h_2)(k_1 + k_2) + k_1 k_2 = 0$. Vergl. Lös. 251.

334. Zunächst ist festzustellen, dafs die gegebenen Punkte auf einer Geraden liegen, dann findet man

$$\tfrac{11}{6}\left(7\tfrac{4}{11}u - \tfrac{7}{11}v + 1\right) \equiv 11u - 2v + 1 + \tfrac{5}{6}(3u + v + 1) = 0,$$

$$\tfrac{1}{6}(51u - 17v + 1) \equiv 11u - 2v + 1 - \tfrac{5}{6}(3u + v + 1) = 0.$$

Der Wert des Doppelverhältnisses ist $= -1$, die Punkte sind also harmonische.

335. Wir betrachten zunächst die beiden ersten der gegebenen Punkte als zugeordnete Punkte.

Da

$$\tfrac{1}{5}(27u + 35v + 1) \equiv 7u + 3v + 1 - \tfrac{4}{5}(2u - 5v + 1) = 0$$

ist, so ergiebt sich als Gleichung des vierten harmonischen Punktes

$$7u + 3v + 1 + \tfrac{4}{5}(2u - 5v + 1) = 0$$

oder $\quad 4\tfrac{7}{9}u - \tfrac{5}{9}v + 1 = 0.$

Es seien ferner der zweite und dritte Punkt zugeordnete Punkte, dann findet man leicht, dafs

$$\tfrac{5}{4}(7u + 3v + 1) \equiv 2u - 5v + 1 + \tfrac{1}{4}(27u + 35v + 1) = 0;$$

also ist die Gleichung des vierten harmonischen Punktes

$$2u - 5v + 1 - \tfrac{1}{4}(27u + 35v + 1) = 0$$

oder $\quad -6\tfrac{1}{3}u - 18\tfrac{1}{3}v + 1 = 0.$

Ist endlich der dritte Punkt dem ersten zugeordnet, so ergiebt sich

$$-4(2u - 5v + 1) \equiv 27u + 35v + 1 - 5(7u + 3v + 1) = 0,$$

demnach erhält man als Gleichung des vierten Punktes

$$27u + 35v + 1 + 5(7u + 3v + 1) = 0,$$

oder $\quad 10\tfrac{1}{3}u + 8\tfrac{1}{3}v + 1 = 0.$

336. $A_1 - A_2 = 0$. Daraus folgt: Halbiert ein Punkt den Abstand zweier konjugierten Punkte, so liegt der ihm zugeordnete Punkt in unendlicher Ferne.

337. Da die beiden gegebenen Punktepaare auf einer Geraden liegen, so lassen sich die Gleichungen des zweiten Punktepaares durch die des ersten ausdrücken. Es ist nämlich

$$-3(6u+v+1) \equiv 2u+9v+1-4(5u+3v+1)=0,$$
$$-\tfrac{3}{4}(9u-5v+1) \equiv 2u+9v+1-\tfrac{7}{4}(5u+3v+1)=0.$$

Zur Bestimmung der Parameter h_1 und h_2 des gesuchten Punktepaares ergeben sich demnach die Gleichungen:

$$\frac{h_1}{h_2}=-1,\ \frac{h_1-4}{h_1-\frac{7}{4}}:\frac{h_2-4}{h_2-\frac{7}{4}}=-1,$$

deren Wurzeln

$$r_1=\pm\sqrt{7},\quad r_2=\mp\sqrt{7} \text{ sind.}$$

Die Gleichungen des gesuchten Punktepaares sind somit:

$$2u+9v+1+\sqrt{7}(5u+3v+1)=0,$$
$$2u+9v+1-\sqrt{7}(5u+3v+1)=0.$$

338. Es ist

$$4(5u+3v+1) \equiv 2u+9v+1+3(6u+v+1)=0,$$
$$-\tfrac{4}{3}(9u-5v+1) \equiv 2u+9v+1-\tfrac{7}{3}(6u+v+1)=0.$$

Mit Hilfe der Parameter findet man die Gleichungen des Punktepaares:

$$2u+9v+1-i\sqrt{7}\,(6u+v+1)=0,$$
$$2u+9v+1+i\sqrt{7}\,(6u+v+1)=0.$$

Beide Punkte sind also imaginär.

339. Da

$$\tfrac{7}{4}(5u+3v+1) \equiv 2u+9v+1+\tfrac{3}{4}(9u-5v+1)=0,$$
$$\tfrac{7}{3}(6u+\ \ v+1) \equiv 2u+9v+1+\tfrac{4}{3}(9u-5v+1)=0$$

ist, so ergeben sich als Gleichungen des gesuchten Punktepaares:

$$2u+9v+1+1(9u-5v+1)=0,$$
$$2u+9v+1-1(9u-5v+1)=0,$$

d. h. der erste Punkt halbiert den Abstand je zweier zugeordneten Punkte, der zweite dagegen liegt in der Unendlichkeit.

340. Liegen die beiden Strecken, von denen jede von einem Punktepaar begrenzt wird, ganz getrennt, oder liegt die eine vollständig in der andern, so sind die beiden Punkte, welche beide Strecken harmonisch teilen, reell. Liegt dagegen die eine Strecke zum Teil auf der andern, so sind die beiden Punkte, welche beide Strecken harmonisch teilen, imaginär.

341. Sind k_1, k_2 die Parameter des Punktepaares, welches zu den gegebenen harmonisch ist, so müssen dieselben folgenden Gleichungen genügen:

$$k_1 k_2 - \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2)(h_1 + h_2) + h_1 h_2 = 0,$$
$$k_1 k_2 - \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2)(h_3 + h_4) + h_3 h_4 = 0,$$
$$k_1 k_2 - \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2)(h_5 + h_6) + h_5 h_6 = 0.$$

Daraus ergiebt sich durch Elimination von k_1, k_2 die Bedingungsgleichung der Involution

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ h_1 + h_2 & h_3 + h_4 & h_5 + h_6 \\ h_1 h_2 & h_3 h_4 & h_5 h_6 \end{vmatrix} = 0.$$

342. Die Parameter der gegebenen Punkte sind:

$$h_1 = 3,\ h_2 = -2,\ h_3 = -1,\ h_4 = \tfrac{3}{2},\ h_5 = 2,\ h_6 = -\tfrac{15}{11}.$$

$$\text{Da} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 - 2 & -1 + \frac{3}{2} & 2 - \frac{15}{11} \\ -6 & -\frac{3}{2} & -\frac{30}{11} \end{vmatrix} = 0$$

ist, so bilden die drei Punktepaare eine Involution.

343. Man bestimmt zunächst die Parameter der gegebenen Punkte; diese sind:

$$h_1 = \tfrac{1}{2},\ h_2 = \tfrac{2}{3},\ h_3 = 2,\ h_4 = \tfrac{3}{2},\ h_5 = -2.$$

Zur Berechnung des Parameters des sechsten Punktes erhält man dann die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{7}{6} & \frac{7}{2} & -2 + x \\ \frac{1}{3} & 3 & -2x \end{vmatrix} = 0,$$

woraus sich $x = \frac{23}{22}$ ergiebt. Die Gleichung des sechsten Punktes ist demnach

$$-131u - 267v + 1 = 0.$$

344. Da

$$-3(6u+v+1) \equiv 2u+9v+1-4(5u+3v+1)=0,$$
$$-\tfrac{3}{4}(9u-5v+1) \equiv 2u+9v+1-\tfrac{7}{4}(5u+3v+1)=0$$

ist, so erhält man zur Bestimmung der Parameter der Doppelpunkte die Relation

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0+\infty & 5\tfrac{3}{4} & 2x \\ 0\cdot\infty & 7 & x^2 \end{vmatrix} = 0,$$

also ist $x = \pm\sqrt{7}$.

Die Gleichungen der Doppelpunkte sind:

$$2u+9v+1-\sqrt{7}(5u+3v+1)=0,$$
$$2u+9v+1+\sqrt{7}(5u+3v+1)=0.$$

Durch Vergleichung mit Lösung 337 findet man, daſs die Doppelpunkte zugleich diejenigen Punkte sind, welche zu jedem Punktepaare der Involution harmonisch sind.

345. Die Zahl der Doppelpunkte kann nicht gröſser als 2 sein. Vergl. Lösung 274.

346. $2u-5v+1=0$.

347. Der gesuchte Punkt halbiert den Abstand der beiden Doppelpunkte und besitzt demnach die Gleichung $8u-2v+1=0$.

348. Je zwei zugeordnete Punkte der involutorischen Punktreihe liegen symmetrisch zu dem endlichen Doppelpunkte; d. h. der Abstand je zweier zugeordneten Punkte wird durch den endlichen Doppelpunkt halbiert. Die Involution wird in diesem Falle eine symmetrische genannt.

349. Die $A_2=0$, $A_3=0$ u. s. f. zugeordneten Punkte der Involution fallen alle mit dem Punkte $A_1=0$ zusammen.

350. Sind k_1, k_2, h_1, h_2 die Parameter von zwei Punktepaaren der involutorischen Punktreihe, so muſs

$$(k_1k_2-h_1h_2)^2+k_1k_2(h_1+h_2)^2+h_1h_2(k_1+k_2)^2$$
$$-(h_1h_2+k_1k_2)(k_1+k_2)(h_1+h_2)<0$$

sein.

351. Betrachtet man die beiden ersten Punkte als Fundamentalpunkte der Reihe, so ergiebt sich

$$
\begin{aligned}
-\tfrac{2}{5}(12u + 11v + 1) &\equiv 5u - 3v + 1 - \tfrac{7}{5}(7u + v + 1) = 0,\\
-1(\ 9u + \ 5v + 1) &\equiv 5u - 3v + 1 - 2(7u + v + 1) = 0,\\
\tfrac{2}{5}(\ 2u - \ 9v + 1) &\equiv 5u - 3v + 1 - \tfrac{3}{5}(7u + v + 1) = 0,\\
-\tfrac{1}{2}(11u + \ 9v + 1) &\equiv 5u - 3v + 1 - \tfrac{3}{2}(7u + v + 1) = 0,\\
2(\ 6u - \ v + 1) &\equiv 5u - 3v + 1 + 1(7u + v + 1) = 0,\\
\tfrac{1}{3}(\ u - 11v + 1) &\equiv 5u - 3v + 1 - \tfrac{2}{3}(7u + v + 1) = 0.
\end{aligned}
$$

Bezeichnet man dann mit l_1 und l_2 die Parameter der gesuchten Punkte, so erhält man zur Berechnung derselben die Relationen

$$l_1 \cdot l_2 = \tfrac{14}{5}, \ 73 l_1 l_2 - 47(l_1 + l_2) + 33 = 0.$$

Daraus folgt: Es existiert nur ein einziges Punktepaar, welches sowohl mit den beiden ersten, als auch mit den beiden letzten Punktepaaren eine Involution bildet.

352. Da

$$
\begin{aligned}
au + bv + 1 \equiv k_1(a_1u + b_1v + 1) &+ k_2(a_2u + b_2v + 1)\\
&+ k_3(a_3u + b_3v + 1) = 0
\end{aligned}
$$

ist, so ergeben sich zur Bestimmung der Gröfsen k_1, k_2, k_3 die Gleichungen

$$k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3 = a, \ k_1b_1 + k_2b_2 + k_3b_3 = b,$$
$$k_1 + k_2 + k_3 = 1.$$

Aus diesen folgt:

$$k_1 = \frac{1}{\varDelta}\begin{vmatrix} a & a_2 & a_3 \\ b & b_2 & b_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \ k_2 = \frac{1}{\varDelta}\begin{vmatrix} a_1 & a & a_3 \\ b_1 & b & b_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$k_3 = \frac{1}{\varDelta}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a \\ b_1 & b_2 & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \text{ wo } \varDelta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ ist.}$$

Anmerkung. Dividieren wir die gewonnene Gleichung

$$k_1U_1 + k_2U_2 + k_3U_3 = 0$$

durch $\sqrt{u^2 + v^2}$ und führen statt der Quotienten

$$\frac{U_1}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \ \frac{U_2}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \ \frac{U_3}{\sqrt{u^2 + v^2}},$$

die Bezeichnungen u_1, u_2, u_3 ein, so nimmt die Gleichung des Punktes die Gestalt $k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 = 0$ an.

353. In dem Fundamentaldreieck, dessen Eckpunkte U_1, U_2, U_3 sind, werde die Länge der Seite $U_2 U_3$ mit l_1, die von $U_3 U_1$ mit l_2, die von $U_1 U_2$ mit l_3 und die auf diesen Seiten stehenden Höhen mit h_1, h_2, h_3 bezeichnet, ferner seien d_1, d_2, d_3 die Abstände des Punktes A, welcher der Gleichung $k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = 0$ entspricht, von den Seiten des Fundamentaldreiecks.

Es ist nun nach der Lösung der vorigen Aufgabe

$$\varDelta = 2\, U_1 U_2 U_3, \quad \varDelta k_1 = 2\, A\, U_2 U_3,$$
$$\varDelta k_2 = 2\, U_1 A\, U_3, \quad \varDelta k_3 = 2\, U_1 U_2 A.$$

Die Einsetzung dieser Werte in die Gleichung des Punktes führt zu folgender Form

$$\frac{l_1 d_1}{l_1 h_1} u_1 + \frac{l_2 d_2}{l_2 h_2} u_2 + \frac{l_3 d_3}{l_3 h_3} u_3 = 0,$$

oder
$$\frac{d_1}{h_1} u_1 + \frac{d_2}{h_2} u_2 + \frac{d_3}{h_3} u_3 = 0.$$

u_1, u_2, u_3 sind die Abstände der Eckpunkte U_1, U_2, U_3 von einer Geraden, welche durch den Punkt A geht.

Durch Vergleichung mit Lösung 285 gelangt man zu folgendem Resultate:

Der Gleichung $\frac{d_1}{h_1} u_1 + \frac{d_2}{h_2} u_2 + \frac{d_3}{h_3} u_3 = 0$ entspricht ein Punkt, wenn u_1, u_2, u_3 Linienkoordinaten sind, dagegen eine Gerade, wenn d_1, d_2, d_3 als Punktkoordinaten betrachtet werden.

354. $u_1 : u_2 : u_3 = \begin{vmatrix} k_2 & k_3 \\ k_2' & k_3' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} k_3 & k_1 \\ k_3' & k_1' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ k_1' & k_2' \end{vmatrix}.$

355. $\begin{vmatrix} u_2' & u_3' \\ u_2'' & u_3'' \end{vmatrix} u_1 + \begin{vmatrix} u_3' & u_1' \\ u_3'' & u_1'' \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} u_1' & u_2' \\ u_1'' & u_2'' \end{vmatrix} u_3 = 0.$

356. $\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1' & k_2' & k_3' \\ k_1'' & k_2'' & k_3'' \end{vmatrix} = 0.$

357. $k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 + \lambda (k_1' u_1 + k_2' u_2 + k_3' u_3) = 0.$

358. Zieht man in dem Abstande d zu der Geraden, deren Linienkoordinaten u_1, u_2, u_3 sind, eine Parallele, so sind die Linienkoordinaten derselben:

$$u_1 + d, \; u_2 + d, \; u_3 + d.$$

Da diese Gerade die erste in dem unendlich fernen Punkte derselben schneidet, so mufs dieser Schnittpunkt auch der Gleichung

$$k_1(u_1+d)+k_2(u_2+d)+k_3(u_3+d)=0$$

oder

$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3+d(k_1+k_2+k_3)=0$$

entsprechen. Daraus folgt:

$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3=0$$

ist die Gleichung eines unendlich fernen Punktes, wenn

$$k_1+k_2+k_3=0$$

ist.

359. Die Gleichung eines Punktes ist

$$\frac{d_1}{h_1}u_1+\frac{d_2}{h_2}u_2+\frac{d_3}{h_3}u_3=0.$$

Da für den Schwerpunkt

$$d_1:h_1=d_2:h_2=d_3:h_3=1:3$$

ist, so ergiebt sich $u_1+u_2+u_3=0$.

360. Bestimmt man die Abstände des Mittelpunktes von den Seiten des Fundamentaldreiecks, so erhält man die Gleichung

$$\frac{u_1 R\cos A}{h_1}+\frac{u_2 R\cos B}{h_2}+\frac{u_3 R\cos C}{h_3}=0,$$

welche sich durch einfache Umformung auf die Gestalt

$$u_1\sin 2A+u_2\sin 2B+u_3\sin 2C=0$$

bringen läfst. (A, B, C sind die Winkel des Fundamentaldreiecks.)

361. Drückt man die Abstände des Punktes von den Seiten durch den Radius des umschriebenen Kreises und die Winkel des Dreiecks aus, so ergiebt sich

$$\frac{2R\cos B\cos C}{h_1}u_1+\frac{2R\cos A\cos C}{h_2}u_2+\frac{2R\cos A\cos B}{h_3}u_3=0$$

oder

$$u_1\operatorname{tg}A+u_2\operatorname{tg}B+u_3\operatorname{tg}C=0.$$

362. Multipliciert man in der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{tg}A & \operatorname{tg}B & \operatorname{tg}C \\ \sin 2A & \sin 2B & \sin 2C \end{vmatrix}$$

die Glieder der ersten Zeile mit $2\sin A\sin B\sin C$ und subtrahiert dieselben von den gleichstelligen der dritten Zeile, so nimmt dieselbe nach wenigen Umformungen die Gestalt

$$-1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{tg} A & \operatorname{tg} B & \operatorname{tg} C \\ 2\sin A\cos B\cos C & 2\cos A\sin B\cos C & 2\cos A\cos B\sin C \end{vmatrix}$$

an oder

$$-2\cos A\cos B\cos C\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{tg} A & \operatorname{tg} B & \operatorname{tg} C \\ \operatorname{tg} A & \operatorname{tg} B & \operatorname{tg} C \end{vmatrix} = 0.$$

Nach Lösung 356 liegen demnach die drei Punkte in einer geraden Linie.

363. $u_1\frac{\varrho}{h_1} + u_2\frac{\varrho}{h_2} + u_3\frac{\varrho}{h_3} = 0$

oder $u_1 \sin A + u_2 \sin B + u_3 \sin C = 0.$

364. $u_1 \cot\frac{A}{2} + u_2 \cot\frac{B}{2} + u_3 \cot\frac{C}{2} = 0.$

365. Es ist

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin A & \sin B & \sin C \\ \cot\frac{A}{2} & \cot\frac{B}{2} & \cot\frac{C}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} & -2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} & -2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \\ \cot\frac{A}{2} & \cot\frac{B}{2} & \cot\frac{C}{2} \end{vmatrix}$$

$$= -2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cot\frac{A}{2} & \cot\frac{B}{2} & \cot\frac{C}{2} \\ \cot\frac{A}{2} & \cot\frac{B}{2} & \cot\frac{C}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

366. Bezeichnen wir den gesuchten Abstand mit k, so läfst sich die Gleichung des Punktes auch in der Form

$$\frac{d_1}{h_1}(u_1' \pm k) + \frac{d_2}{h_2}(u_2' \pm k) + \frac{d_3}{h_3}(u_3' \pm k) = 0$$

schreiben; daraus ergiebt sich

$$k = \pm \frac{\frac{d_1}{h_1} u_1' + \frac{d_2}{h_2} u_2' + \frac{d_3}{h_3} u_3'}{\frac{d_1}{h_1} + \frac{d_2}{h_2} + \frac{d_3}{h_3}}.$$ Vergl. Lös. 311.

Der Kreis.

367. Die Gleichung des Kreises ist

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Beispiele. α) $x^2 + y^2 = 81$;

β) $(x - 7)^2 + y^2 = 9$;

γ) $x^2 + (y + 2)^2 = 121$;

δ) $(x + 4)^2 + (y - 17)^2 = 1$.

368. Der Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Fy + G = 0$$

entspricht ein Kreis, wenn $A = B$ und $C = 0$ ist.

369. Die Mittelpunktskoordinaten sind $-\frac{L}{2A}$, $-\frac{M}{2A}$, der Radius gleich $\sqrt{\frac{L^2 + M^2 - 4AN}{4A^2}}$.

Ist $N = 0$, so geht der Kreis durch den Koordinatenanfangspunkt.

Beispiele. α) $a = -4$, $b = 3$, $r = \sqrt{28}$;

β) $a = -3{,}5$, $b = -6$, $r = \sqrt{46{,}25}$;

γ) $a = -2{,}5$, $b = 1{,}5$, $r = \sqrt{4{,}5}$.

370. Die beiden Kreise sind konzentrisch, wenn

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ und } \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ ist.}$$

371. Der Gleichung $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0$ entspricht ein Kreis, dessen Mittelpunktskoordinaten a, b sind und dessen Radius gleich 0 ist, also der Mittelpunkt (a, b) selbst. Da die gegebene Gleichung sich auf die Form

$$\{(x - a) + (y - b)i\} \{(x - a) - (y - b)i\} = 0$$

bringen läfst, so kann man auch sagen: der Gleichung entsprechen zwei imaginäre Gerade, welche durch den reellen Punkt (a, b) hindurchgehen.

372. Der gegebenen Gleichung entspricht in diesem Falle kein reelles Gebilde.

373. Die Kurve ist ein Kreis, dessen Mittelpunktskoordinaten $x_1 = \frac{3}{2}$, $y_1 = \frac{5}{2}$ sind, und dessen Radius $= \sqrt{\frac{17}{2}}$ ist.

374. Die Gleichung der Centrale ist

$$3y - 2x = 29,$$

die Länge des Lotes $= 8{,}04315$.

375. Da

$$x^2 + y^2 + A_1 x + B_1 y + C_1 + k(x^2 + y^2 + A_2 x + B_2 y + C_2)$$
$$= x^2(1+k) + y^2(1+k) + x(A_1 + kA_2) + y(B_1 + kB_2) + C_1 + kC_2 = 0$$

ist, so entspricht dieser Gleichung ein Kreis, der durch die Schnittpunkte der beiden Kreise

$$x^2 + y^2 + A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

geht.

376. $\varrho^2 - 2\varrho\varrho_1 \cos(\varphi - \varphi_1) + \varrho_1{}^2 = r^2.$

377. $(y' - 8)^2 + (x' - 7)^2 = 49.$

378. Die Gleichung bleibt unverändert.

379. $x_1{}^2 + y_1{}^2 + 2\sqrt{2}\,x_1 + 9\sqrt{2}\,y_1 - 3 = 0.$

380. $(x - a)^2 + (y - b)^2 + 2(x - a)(y - b)\cos\alpha = r^2.$

381. Die Koordinaten der Schnittpunkte sind:

$$x_1 = p\cos\alpha \pm \sqrt{r^2 - p^2}\sin\alpha,$$
$$y_1 = p\sin\alpha \mp \sqrt{r^2 - p^2}\cos\alpha.$$

So lange $p < r$ ist, schneidet die gerade Linie den Kreis in zwei reellen Punkten. Ist $p = r$, so fallen die beiden Schnittpunkte zusammen, die gerade Linie berührt den Kreis. Für $p > r$ sind die beiden Wurzeln imaginär, die Gerade schneidet also den Kreis in zwei imaginären Punkten.

382. a) $x_1 = \dfrac{-Mn \pm \sqrt{r^2(1+M^2)-n^2}}{1+M^2}$,

$$y_1 = \frac{n \pm M\sqrt{r^2(1+M^2)-n^2}}{1+M^2}.$$

Die Gerade ist Tangente des Kreises, wenn

$$r^2(1+M^2) = n^2 \text{ ist.}$$

b) $x_1 = \dfrac{q^2 p \pm p\sqrt{r^2(p^2+q^2)-p^2q^2}}{p^2+q^2}$,

$$y_1 = \frac{p^2 q \mp q\sqrt{r^2(p^2+q^2)-p^2q^2}}{p^2+q^2}.$$

Beispiele. a) $x_1 = 12$, $y_1 = 5$;

$x_2 = 10{,}12$, $y_2 = -8{,}16$.

b) Die Gerade berührt den Kreis in dem Punkte

$$x_1 = 8, \quad y_1 = 6.$$

c) Die Schnittpunkte sind imaginär:

$$x_{1_2} = \frac{-46 \pm 2i\sqrt{671}}{5}, \quad y_{1_2} = \frac{92 \pm i\sqrt{671}}{5}.$$

383. Die Koordinaten der Schnittpunkte sind:

$$x_{1_2} = -\frac{N}{L} + \frac{M}{2L}\left(\frac{2MN - BLM + CL^2}{L^2+M^2}\right)$$
$$\pm \frac{M}{L}\frac{\sqrt{\frac{1}{4}(2MN-BLM+CL^2)^2+(BLN-L^2F-N^2)(L^2+M^2)}}{L^2+M^2},$$
$$y_{1_2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2MN - BLM + CL^2}{L^2+M^2}\right)$$
$$\mp \frac{\sqrt{\frac{1}{4}(2MN-BLM+CL^2)^2+(BLN-L^2F-N^2)(L^2+M^2)}}{L^2+M^2};$$

der Abstand des Mittelpunktes von der Geraden ist

$$d = \frac{1}{2}\,\frac{2N - LB - MC}{\sqrt{L^2+M^2}}.$$

Beispiele. a) $x_1 = 10$, $y_1 = 9$;

$x_2 = 1\frac{9}{13}$, $y_2 = -3\frac{6}{13}$.

b) Die Gerade berührt den Kreis im Punkte

$$x_1 = 9, \quad y_1 = 0.$$

384. a) Die Linienkoordinaten u und v müssen der Bedingungsgleichung

$$\frac{(a_1 u + b_1 v + 1)^2}{u^2 + v^2} - r_1{}^2 = 0$$

genügen. Diese Relation ist zugleich die Gleichung des Kreises in Linienkoordinaten.

b) Die Konstanten müssen den Gleichungen

$$2BF - DE = 0, \; D^2 - E^2 = 4F(A - C)$$

genügen. Die Gleichung des Mittelpunktes ist $Du + Ev + 2F = 0$.

$$r_1 = \frac{D^2 - 4AF}{4F^2}.$$

385. Die X-Achse wird in den Punkten -3 und -19, die Y-Achse in den Punkten $9 \pm 2\sqrt{6}$ geschnitten.

386. $x^2 + y^2 - 14x - 14y + 49 = 0.$

387. $y = x \cdot \dfrac{BC \pm 2\sqrt{AF(B^2 - 4AF + C^2)}}{4AF - C^2}.$

Beispiele.

a) $y = \dfrac{77 \pm 3\sqrt{161}}{112}\, x.$

b) Der Koordinatenanfangspunkt liegt in der Kreisfläche, daher lassen sich von ihm aus keine reellen Tangenten an den Kreis ziehen. Die Gleichungen der imaginären Tangenten sind:

$$y = \frac{-15 \pm 3i\sqrt{183}}{52}\, x.$$

388. Die Koordinaten der Schnittpunkte sind:

$$x_1 = -8, \quad y_1 = 7,$$
$$x_2 = 2\tfrac{7}{17}, \quad y_2 = -10\tfrac{6}{17},$$

demnach die Länge der Sehne $= 20{,}2368$, der Centriwinkel $= 144^0\ 18'$.

389. Die Gleichung der Sehne ist

$$19y + (5 - 2\sqrt{30})\, x = 35 + 24\sqrt{30},$$

der Inhalt des Dreiecks gleich $\frac{1}{2}(35 + 24\sqrt{30})$ □.

390. Die Gleichung der Sehne ist

$$5y - 4x + 71 = 0,$$

die Koordinaten des zweiten Schnittpunktes:

$$x_2 = 4\tfrac{35}{41}, \quad y_2 = -10\tfrac{13}{41}.$$

391. Betrachtet man $y - y_1 = \operatorname{tg}\alpha\,(x - x_1)$ als Gleichung der gesuchten Sehne, so dient zur Bestimmung der Unbekannten $\operatorname{tg}\alpha$ die Relation

$$\frac{x_1 \operatorname{tg}\alpha - y_1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = d.$$

Da sich aus derselben zwei Werte für $\operatorname{tg}\alpha$ ergeben, so werden sich zwei Sehnen ziehen lassen, welche der Anforderung genügen.

Beispiel. $y - 4 = \dfrac{-14 \pm 5\sqrt{10}}{12}(x + 7)$.

392. $yy_1 + xx_1 = x_1^2 + y_1^2$.

Beispiel. $3x - 5y = 34$. Die Koordinaten der Schnittpunkte dieser Sehne und des Kreises sind:

$$x_{1_2} = 3 \pm 45\sqrt{\tfrac{3}{34}}, \quad y_{1_2} = -5 \pm 27\sqrt{\tfrac{3}{34}}.$$

393. $xx_1 + yy_1 = r^2$.

Beispiele. a) $8x + 17y = 353$.

b) $9x - 13y = 250$.

c) $11x \pm \sqrt{222}\,y + 343 = 0$.

394. Die Länge der Tangente ist

$$l = \frac{r^2}{x_1 y_1}\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \frac{r^3}{x_1 y_1},$$

die Gleichung der Normale

$$y = -\frac{\sqrt{r^2 - x_1^2}}{x_1}\,x.$$

Beispiel. $l = \dfrac{116\sqrt{58}}{21}$; $7y + 3x = 0$.

395. $(x - \alpha)(x_1 - \alpha) + (y - \beta)(y_1 - \beta) = r^2$.

Beispiele. a) $8x + 7y = 97$, $8x - 7y = 209$.

b) $3x + 7y = 93$, $3x - 7y = 65$.

c) $x \pm 3\sqrt{11}\;y = 102 \mp 33\sqrt{11}$.

396. Die Gleichungen der Tangenten sind:

$$6x + 5y = 114, \quad 6x - 5y = 44,$$

die Abstände vom Koordinatenanfangspunkte:

$$\frac{114}{\sqrt{61}} \text{ und } \frac{44}{\sqrt{61}},$$

die Abschnitte zwischen den Koordinatenachsen:

$$\frac{57}{15}\sqrt{61} \text{ und } \frac{22}{15}\sqrt{61}.$$

397. Die Tangente des Winkels ist gleich

$$\frac{Ax_1 + By_1 + 2C}{Ay_1 - Bx_1},$$

die Gleichung der Normale

$$(2x_1 + A)\,y - (2y_1 + B)\,x = Ay_1 - Bx_1.$$

Beispiel. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{93}{43}$, $\sphericalangle \varphi = 65^0\ 11'\ 9''$;

$$3y - 7x + 43 = 0.$$

398. $\operatorname{tg}\varphi_1 = -\frac{6}{5}$, $\sphericalangle \varphi_1 = 129^0\ 48'\ 20''$,

$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{6}{5}$, $\sphericalangle \varphi_2 = 50^0\ 11'\ 40''$.

399. $y = 2x + 13 \pm 6\sqrt{5}$.

400. Die Gleichungen der Tangenten sind:

$$y\,(3\sqrt{3} - 4) - x\,(4 + 3\sqrt{3}) = \pm 10\sqrt{58},$$
$$y\,(4\sqrt{3} + 3) - x\,(4 - 3\sqrt{3}) = \pm 10\sqrt{58}.$$

Ist die gegebene Gerade die X-Achse, so sind die Gleichungen:

$$y = x\sqrt{3} \pm 2\sqrt{58},$$
$$y = -x\sqrt{3} \pm 2\sqrt{58}.$$

401. Es ergeben sich zwei Sekanten, deren Gleichungen sind:

$$4y - x = 7,\quad y + 4x = 40.$$

402. Die Gleichungen der Tangenten sind:

$$\pm y\sqrt{247} + 3x = 304,$$

also die Tangente des eingeschlossenen Winkels

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3\sqrt{247}}{119}, \text{ demnach } \sphericalangle \varphi = 21^0\,36'\,50''.$$

403. $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\left(x_2 + \frac{A}{2}\right)\left(y_1 + \frac{B}{2}\right) - \left(x_1 + \frac{A}{2}\right)\left(y_2 + \frac{B}{2}\right)}{\left(x_1 + \frac{A}{2}\right)\left(x_2 + \frac{A}{2}\right) + \left(y_1 + \frac{B}{2}\right)\left(y_2 + \frac{B}{2}\right)}.$$

Die beiden Tangenten laufen parallel, wenn

$$\frac{y_1 + \frac{B}{2}}{x_1 + \frac{A}{2}} = \frac{y_2 + \frac{B}{2}}{x_2 + \frac{A}{2}}$$

ist, d. h. wenn die nach den Berührungspunkten gezogenen Radien in einer geraden Linie liegen; dagegen stehen sie lotrecht zu einander, wenn

$$\frac{y_1 + \frac{B}{2}}{x_1 + \frac{A}{2}} = -\frac{x_2 + \frac{A}{2}}{y_2 + \frac{B}{2}},$$

d. h. wenn sich die nach den Berührungspunkten gezogenen Radien rechtwinklig schneiden.

404. Sbtg $= 10$.

405. a) $\mathrm{Tg} = \dfrac{y_1\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2\left(x_1 + \frac{A}{2}\right)}$; b) $N = \dfrac{y_1\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2\left(y_1 + \frac{B}{2}\right)}$;

c) $\mathrm{Sbtg} = \dfrac{y_1\left(y_1 + \frac{B}{2}\right)}{x_1 + \frac{A}{2}}$; d) $\mathrm{Sbn} = \dfrac{y_1\left(x_1 + \frac{A}{2}\right)}{y_1 + \frac{B}{2}}$.

Beispiel. $\mathrm{Tg} = 3\sqrt{58}$, $N = \frac{9}{7}\sqrt{58}$,
$\mathrm{Sbtg} = 21$, $\mathrm{Sbn} = 3\frac{6}{7}$.

406. $\mathrm{Tg} = \sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2}$.
Beispiel. $\mathrm{Tg} = \sqrt{427} = 20{,}664$.

407. Man erhält zwei Punkte, deren Koordinaten sind:

$$x_1 = 7, \quad y_1 = -5;$$
$$x_2 = -6\tfrac{7}{29}, \; y_2 = 9\tfrac{26}{29}.$$

408. $x^2 + y^2 = p\,(p + q)$.

409. $x^2 + y^2 = 2{,}5$.

410. Der Abschnitt auf der Tangente ist gleich $2y_1$, d. h. gleich der doppelten Ordinate des Berührungspunktes.

411. Die Tangenten entsprechen der Gleichung

$$y - y_1 = \frac{-y_1 x_1 \pm r\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - r^2}}{r^2 - x_1^2}(x - x_1).$$

Die Koordinaten des Berührungspunktes sind:

$$x_2 = \frac{r^2 x_1 \pm r y_1 \sqrt{y_1^2 + x_1^2 - r^2}}{y_1^2 + x_1^2},$$

$$y_2 = \frac{r^2 y_1 \mp r x_1 \sqrt{y_1^2 + x_1^2 - r^2}}{y_1^2 + x_1^2}.$$

Die Tangenten sind also nur dann reell, wenn $x_1^2 + y_1^2 \geqq r^2$ ist.

Beispiel. $87y - (176 \mp 52\sqrt{13})x = \pm 832\sqrt{13} - 1859$;

$$x_2 = \frac{208 \pm 44\sqrt{13}}{29}, \quad y_2 = \frac{13 \mp 64\sqrt{13}}{29}.$$

412. $xx_1 + yy_1 = r^2$.

Beispiele. a) $13x + 2y = 49$.

b) $5x - y\sqrt{105} = 130$.

Der Pol (x_1, y_1) liegt auf der Peripherie des Kreises, die Polare berührt in diesem Falle den Kreis in diesem Punkte.

c) $4y - 12x = 289$.

Liegt also der Pol in der Kreisfläche, so dafs sich von ihm aus keine reellen Tangenten an den Kreis ziehen lassen, so ist doch die Polare eine reelle Gerade.

413. Die Koordinaten der Schnittpunkte sind:

$$x_{2_3} = \frac{363 \pm 132\, i\sqrt{3}}{13},$$

$$y_{2_3} = \frac{484 \mp 198\, i\sqrt{3}}{13}.$$

Die Wurzeln sind imaginär; der Kreis und die Polare haben also keine reellen Schnittpunkte.

414. $x = r$.

415. $(x - \alpha)(x_1 - \alpha) + (y - \beta)(y_1 - \beta) = r^2$.

Beispiele. a) $8x + 22y + 5 = 0$,

b) $15x - 2y + 63 = 0$,

c) $11x + 6y - 68 = 0$.

416. Da der Punkt (a, b) als ein Kreis mit unendlich kleinem Radius zu betrachten ist, so ist die Gleichung desselben

$$(x-a)^2+(y-b)^2=0,$$

also die der gesuchten Polare

$$(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=0.$$

Daraus folgt: Die Polare des Punktes (x_1, y_1) bezüglich des Punktes (a, b) geht durch den letztern Punkt und steht auf der Verbindungslinie beider senkrecht.

Beispiel. $7x+5y-18=0$.

417. Die Gleichung der Polare des Punktes (x_1, y_1) bezüglich des Kreises

$$x^2(1+k)+y^2(1+k)+(A_1+kA_2)x+(B_1+kB_2)y+C_1+kC_2=0$$

ist

$$xx_1+\frac{A_1+kA_2}{2(1+k)}(x+x_1)+yy_1+\frac{B_1+kB_2}{2(1+k)}(y+y_1)+\frac{C_1+kC_2}{1+k}=0.$$

Diese geht für $k=-1$ über in

$$(A_1-A_2)(x+x_1)+(B_1-B_2)(y+y_1)+2(C_1-C_2)=0.$$

Die Gerade G läuft der Polare parallel und halbiert den Abstand des Poles von der Polare.

Beispiel. $5x-3y-6=0$.

418. Die Polare fällt mit der unendlich fernen Geraden zusammen.

419. Die Richtungskonstante der Polare ist $-\frac{x_1-a}{y_1-b}$, die der Verbindungslinie $\frac{y_1-b}{x_1-a}$. Beide Linien schneiden sich also unter rechtem Winkel.

420. Die Abschnitte, welche von der Polare auf den Koordinatenachsen gebildet werden, sind $\frac{r^2}{x_1}$ und $\frac{r^2}{y_1}$. Die Längen dieser Strecken lassen sich mit Leichtigkeit finden und zur Konstruktion verwenden.

421. $d=\frac{r^2}{\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2}}$.

422. Die Koordinaten des zugehörigen Poles sind:

$$x_1=-\frac{r^2M}{n},\ y_1=\frac{r^2}{n}.$$

Beispiele. a) $x_1 = 12,\ y_1 = -4$;

b) $x_1 = 6\frac{4}{7},\ y_1 = -15\frac{1}{3}$;

c) $x_1 = -35\frac{10}{17},\ y_1 = 28\frac{8}{17}$.

423. a) Die Koordinaten des Poles sind:

$$x_1 = a - \frac{Lr^2}{La + Mb + N},\quad y_1 = b - \frac{Mr^2}{La + Mb + N}.$$

b) die Gleichung des Poles in Linienkoordinaten ist

$$u\{a(u_1 a + v_1 b + 1) - r^2 u_1\} + v\{b(u_1 a + v_1 b + 1) - r^2 v_1\}$$
$$+ u_1 a + v_1 b + 1 = 0.$$

Beispiele. 1) $x_1 = 29{,}5,\ y_1 = 9{,}25$;

2) $x_1 = 37\frac{10}{19},\ y_1 = 29\frac{9}{19}$.

424. Die Koordinaten des Schnittpunktes sind:

$x_1 = -2\frac{9}{13},\ y_1 = 1\frac{12}{13}$.

425. Die Polare ist ein Durchmesser des gegebenen Kreises, der zugehörige Pol liegt in der Unendlichkeit.

426. $x_1 = a,\ y_1 = b$. Der Pol fällt mit dem Punkte zusammen, wenn der letztere nicht auf der gegebenen Geraden liegt. Geht dagegen die Gerade durch den Punkt (a, b), so ist die Lage des Poles unbestimmt. Der Ort desselben ist das in (a, b) auf der Geraden errichtete Lot.

427. $x_1 = 6\frac{15}{58},\ y_1 = -14\frac{35}{58}$.

428. Die Koordinaten des konjugierten Poles sind:

$$x_2 = \frac{r^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2},\quad y_2 = \frac{r^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2}.$$

429. $$x_2 = \frac{r^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2},\quad y_2 = \frac{r^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2}.$$

430. Die Gleichung des geometrischen Ortes ist

$$\frac{N_1 M_2 - N_2 M_1}{L_1 M_2 - L_2 M_1}\, x_1 + \frac{L_1 N_2 - L_2 N_1}{L_1 M_2 - L_2 M_1}\, y_1 + r^2 = 0.$$

d. i. die Polare des Mittelpunktes des Büschels bezüglich des Kreises. Dreht sich also die Polare um einen festen Punkt, so bewegt sich der Pol auf der Polare des festen Punktes fort.

431. Die zugehörigen Polaren entsprechen der Gleichung

$$x_1(Mx - Ly) - Ny - Mr^2 = 0,$$

worin x_1 alle möglichen Werte besitzen kann; sie gehen also alle durch den Punkt

$$x_2 = -\frac{Lr^2}{N},\ y_2 = -\frac{Mr^2}{N}.$$

Welcher Satz folgt daraus?

432. Der Einfachheit wegen nehmen wir an, dafs der Punkt P mit dem Koordinatenanfangspunkte, die Sekante mit der X-Achse zusammenfällt, dann sind die Abscissen der Teilpunkte:

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{a^2 + b^2 - r^2}{a},\ x_{3_4} = a \mp \sqrt{r^2 - b^2}.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung (1) der Lösung 189 ein, so geht dieselbe über in eine identische.

433. Die beiden Punkte liegen auf der X-Achse und besitzen die Abscissen:

$$x_1 = \frac{r^2 + a^2 - r_1{}^2 + \sqrt{(r^2 + a^2 - r_1{}^2)^2 - 4a^2r^2}}{2a},$$

$$x_2 = \frac{r^2 + a^2 - r_1{}^2 - \sqrt{(r^2 + a^2 - r_1{}^2)^2 - 4a^2r^2}}{2a}.$$

Die beiden Punkte fallen zusammen, wenn $a \pm r = r_1$ ist, d. h. wenn sich die beiden Kreise einschliefsend oder ausschliefsend berühren.

434. Die Koordinaten des Mittelpunktes sind:

$$\alpha = -\frac{(y_1{}^2 + x_1{}^2)(y_2 - y_3) + (y_2{}^2 + x_2{}^2)(y_3 - y_1) + (y_3{}^2 + x_3{}^2)(y_1 - y_2)}{2\{y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)\}},$$

$$\beta = \frac{(y_1{}^2 + x_1{}^2)(x_2 - x_3) + (y_2{}^2 + x_2{}^2)(x_3 - x_1) + (y_3{}^2 + x_3{}^2)(x_1 - x_2)}{2\{y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)\}}.$$

Den Radius r bestimmt man durch Einsetzung dieser Werte in die Gleichung

$$(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 = r^2.$$

Die Lage des Kreises ist durch die drei Punkte vollständig bestimmt, da sich mit Hilfe der Koordinaten drei Gleichungen zur Bestimmung der drei unbekannten Konstanten aufstellen lassen. Liegen die drei Punkte in einer Geraden, so ist

$y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2) = 0$ (vergl. Lös. 51), also werden α, β und r unendlich grofs. Es ergiebt sich also ein

Kreis mit unendlich grofsem Radius, dessen Mittelpunkt in der Unendlichkeit liegt.

Beispiele. a) $x^2 + y^2 - 5x - 12y = 0$;

b) $(x - 1{,}3)^2 + (y - 3{,}5)^2 = 13{,}94$;

c) $x^2 + y^2 - 14x - 4y - 5 = 0$.

435. Die Gleichung des geometrischen Ortes der Mittelpunkte ist

$$2x(x_2 - x_1) + 2y(y_2 - y_1) = x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2.$$

Derselbe ist also eine Gerade, welche die Verbindungslinie der gegebenen Punkte unter rechtem Winkel halbiert.

Beispiel. $8x + 6y + 17 = 0$.

436. Die Koordinaten des Mittelpunktes sind:

$$a = \frac{M\{(x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2)\} + 2N(y_2 - y_1)}{2\{M(x_2 - x_1) - L(y_2 - y_1)\}},$$

$$b = \frac{L\{(x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2)\} + 2N(x_2 - x_1)}{2\{L(y_2 - y_1) - M(x_2 - x_1)\}}.$$

Den Radius des Kreises erhält man durch Einsetzung dieser Werte in die Gleichung

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2.$$

Beispiel. $x^2 + y^2 - 14x - 4y - 5 = 0$.

437. Man erhält zwei Kreise, welche der Aufgabe genügen. Die Gleichungen derselben sind:

$$(x - 5)^2 + (y + 8)^2 = 169,$$

$$(x - 22)^2 + (y - 9)^2 = 169.$$

438. Die Koordinaten des Mittelpunktes sind:

$$a = \frac{n_2 - n_1}{M_1 - M_2}, \quad b = \frac{M_1 n_2 - M_2 n_1}{M_1 - M_2}$$

und der Radius:

$$r = \sqrt{\left(x_1 - \frac{n_2 - n_1}{M_1 - M_2}\right)^2 + \left(y_1 - \frac{M_1 n_2 - M_2 n_1}{M_1 - M_2}\right)^2}$$

Beispiel. $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 20$.

439.
$$\begin{aligned}
&(x_1^2 + y_1^2)\{x_2(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_1) + x_4(y_2 - y_3)\}\\
&-(x_2^2 + y_2^2)\{x_3(y_4 - y_1) + x_4(y_1 - y_2) + x_1(y_3 - y_4)\}\\
&+(x_3^2 + y_3^2)\{x_4(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_4 - y_1)\}\\
&-(x_4^2 + y_4^2)\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_4) + x_3(y_1 - y_2)\} = 0.
\end{aligned}$$

440. Es lassen sich zwei Kreise konstruieren, welche den Anforderungen der Aufgabe genügen; dieselben entsprechen der Gleichung

$$x^2 + y^2 - 2(x+y)(x_1 + y_1 \pm \sqrt{2x_1y_1}) + (x_1 + y_1 \pm \sqrt{2x_1y_1})^2 = 0.$$

Beispiel. $x^2 + y^2 - 30(x+y) + 225 = 0,$

$x^2 + y^2 - 6(x+y) + 9 = 0.$

441. Man erhält vier Kreise, welche der Gleichung

$$x^2 + y^2 \pm x\sqrt{4r^2 - b^2} \pm y\sqrt{4r^2 - a^2} + \frac{4r^2 - (a^2 + b^2)}{4} = 0$$

entsprechen. Die Lösung der Aufgabe ist nur möglich, wenn $r^2 > \left(\frac{a}{2}\right)^2$ und $> \left(\frac{b}{2}\right)^2$ ist.

Beispiel. $x^2 + y^2 \pm 8\sqrt{3}\,x \pm \sqrt{187}\,y + \frac{183}{4} = 0.$

442. $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = \frac{\{Lx_1 + My_1 + N\}^2}{L^2 + M^2}.$

Beispiel. $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = \frac{121}{13}.$

443. Es lassen sich zwei Kreise konstruieren. Die Gleichungen derselben sind:

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 100,$$
$$(x - 18)^2 + (y - 16)^2 = 100.$$

444. $(x - 1)^2 + (y - 6)^2 = 25.$

445. Es giebt zwei Kreise, deren Gleichungen sind:

$$(x + 5)^2 + (y - 7)^2 = 169,$$
$$\left\{x + \frac{495 + 240\sqrt{30}}{169}\right\}^2 + \left\{y - \frac{343 + 576\sqrt{30}}{169}\right\}^2 = 169.$$

446. Zieht man in der Entfernung $\sqrt{130}$ Parallelen zu der Geraden $9x + 7y = 98$, so erhält man g. Ö. für den Mittelpunkt, deren Gleichungen

$$9x + 7y = 228, \quad 9x + 7y = -32$$

sind. Man findet also zwei Kreise, nämlich

$$(x - 27\tfrac{2}{59})^2 + (y + 2\tfrac{11}{59})^2 = 130$$

und

$$(x - 5)^2 + (y + 11)^2 = 130.$$

447. $(x-3)^2+(y-1)^2=185,$

$$\left(x+\frac{1799}{185}\right)^2+\left(y-\frac{1897}{185}\right)^2=185.$$

448. Die Gleichungen der geometrischen Örter für die Mittelpunkte der gesuchten Kreise sind:

$$\frac{y-M_1x}{\sqrt{1+M_1^{\,2}}}=\pm\frac{y-M_2x}{\sqrt{1+M_2^{\,2}}},$$

$$\frac{y-M_1x}{\sqrt{1+M_1^{\,2}}}=\pm r.$$

Es lassen sich demnach vier Kreise konstruieren.

Beispiel. $\left(x\pm\frac{7\sqrt{41}}{9}\right)^2+\left(y\mp\frac{7\sqrt{41}}{9}\right)^2=49,$

$$(x\pm 7\sqrt{41})^2+(y\pm 7\sqrt{41})^2=49.$$

449. $(x+4)^2+(y+10)^2=85,$

$$\left(x-\frac{514}{169}\right)^2+\left(y+\frac{670}{169}\right)^2=\frac{85}{169^2}.$$

450. Man erhält zwei Kreise, deren Gleichungen sind:

$$(x-3)^2+(y-1)^2=5,$$

$$(x+\tfrac{17}{6})^2+(y+\tfrac{19}{6})^2=\tfrac{5}{4}.$$

451. Die Gleichung des dem Dreieck eingeschriebenen Kreises ist

$$(x-4\tfrac{5}{6})^2+(y-4\tfrac{1}{6})^2=\frac{338}{36}.$$

452. Zur Bestimmung der Mittelpunktskoordinaten findet man die Gleichungen

$$\tfrac{19}{8}=\frac{17+a}{a^2+b^2+17a+15b-130},$$

$$\tfrac{5}{2}=\frac{15+b}{a^2+b^2+17a+15b-130}.$$

Es lassen sich demnach zwei Kreise konstruieren, die Gleichungen derselben sind:

$$(x-2)^2+(y-5)^2=130,$$

$$(x+20\tfrac{187}{761})^2+(y+18\tfrac{371}{761})^2=130.$$

453. Die Koordinaten der den gegebenen Punkten konjugierten Pole sind:

$$x_3=\tfrac{39}{5},\ y_3=\tfrac{52}{5};\ x_4=\tfrac{60}{13},\ y_4=-\tfrac{25}{13}.$$

Setzt man die Koordinaten der vier Punkte in die Gleichung, welche Lös. 439 enthält, ein, so geht dieselbe über in $0 = 0$; die Punkte liegen also auf der Peripherie eines Kreises. Die Gleichung dieses Kreises ist

$$x^2 + y^2 - 22x - 6y + 65 = 0.$$

454. $x^2 + y^2 = 137$.

455. Zur Bestimmung der Mittelpunktskoordinaten lassen sich die beiden Gleichungen

$$a^2 - 18a + b^2 - 6b + 38 = 0,$$
$$a^2 - 20a + b^2 - 22b = 0$$

aufstellen. Es ergeben sich also zwei Kreise, deren Gleichungen sind:

$$(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 52,$$
$$(x - \tfrac{57}{5})^2 + (y + \tfrac{19}{5})^2 = 52.$$

456. Die Gleichungen, welche zur Bestimmung der Mittelpunktskoordinaten dienen, sind:

$$a - b = \pm 7\sqrt{2},$$
$$a^2 + b^2 - 10a + 6b = 98 + 42\sqrt{2}.$$

Man kann demnach 4 Kreise konstruieren, deren Gleichungen sind:

$$x^2 + (y - 7\sqrt{2})^2 = 49,$$
$$(x - 2 + 7\sqrt{2})^2 + (y - 2)^2 = 49,$$
$$\left\{x - \left(1 + \tfrac{7}{2}\sqrt{2} \pm \sqrt{\tfrac{51}{2} + 49\sqrt{2}}\right)\right\}^2$$
$$+ \left\{y - \left(1 - \tfrac{7}{2}\sqrt{2} \pm \sqrt{\tfrac{51}{2} + 49\sqrt{2}}\right)\right\}^2 = 49.$$

457. Da der Kreis durch die Ecken des Fundamentaldreiecks gehen soll, so mufs die Gleichung desselben die Form haben

$$x_1 x_2 + k x_2 x_3 + h x_3 x_1 = 0.$$

Zur Bestimmung der Konstanten k und h setzt man die Ausdrücke für x_1, x_2, x_3 ein und berücksichtigt, dafs die Koefficienten von x^2 und y^2 gleich sein und der Koefficient von xy verschwinden mufs. Entwickelt man aus diesen beiden Bedingungsgleichungen die Werte für k und h, so erhält man nach Einsetzung derselben als Gleichung des Kreises

$$x_1 x_2 \sin C + x_2 x_3 \sin A + x_3 x_1 \sin B = 0,$$

worin A, B, C die Winkel des Fundamentaldreiecks sind.

458. Fällt man von einem Punkte der Peripherie des eingeschriebenen Kreises Lote auf die Seiten des Fundamentaldreiecks, nämlich x_1, x_2, x_3 und stellt die Beziehungen zwischen diesen, dem Radius des Kreises und den Winkeln des Dreiecks auf, so erhält man durch Vereinigung derselben

$$\sqrt{x_1}\cos\frac{A}{2}+\sqrt{x_2}\cos\frac{B}{2}+\sqrt{x_3}\cos\frac{C}{2}=0.$$

459. $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2.$

460. $(x-a)^2+(y-b)^2=(r+r_1)^2.$

461. $(x-a)^2+(y-b)^2=\frac{r^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$

462. $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2+t^2.$

463. Betrachtet man die Grundlinie a des Dreiecks als X-Achse, das im Halbierungspunkte derselben errichtete Lot als Y-Achse, so ist die Gleichung des geometrischen Ortes der gegenüberliegenden Spitze

$$x^2+y^2+\frac{a\,(m^2+n^2)}{m^2-n^2}\,x+\frac{a^2}{4}=0.$$

Für $m=n$ geht die Gleichung über in $x=0$. Der geometrische Ort ist in diesem Falle die Y-Achse.

464. Die Lage der Grundlinie sei dieselbe wie in der vorhergehenden Lösung; die Gleichung des geometrischen Ortes hat dann die Form

$$x^2+y^2=\frac{2s^2-a^2}{4}.$$

465. Die Gleichung des gesuchten Ortes ist

$$\begin{aligned}nx^2+ny^2-2x\,(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)\\-2y\,(y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n)+x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+\ldots+x_n{}^2\\+y_1{}^2+y_2{}^2+y_3{}^2+\ldots+y_n{}^2=s^2.\end{aligned}$$

466. Die Grundlinie a falle mit der X-Achse zusammen, das im Halbierungspunkte derselben errichtete Lot mit der Y-Achse, dann hat die Gleichung des geometrischen Ortes die Gestalt

$$y^2+x^2-\frac{a}{\operatorname{tg}A}\,y-\frac{a^2}{4}=0.$$

467. Die Grundlinie a falle mit der X-Achse, das im links liegenden Endpunkte errichtete Lot mit der Y-Achse zusammen, dann ist die Gleichung des geometrischen Ortes

$$y^2 + (x - a)^2 = \frac{b^2}{4}.$$

468. Sind x_1, y_1 die Koordinaten des Punktes P, $Lx + My + N = 0$ die Gleichung der Geraden G, so ergiebt sich als Gleichung des geometrischen Ortes

$$n\{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2\} = m^2 \cdot \frac{Lx + My + N}{\sqrt{L^2 + M^2}}.$$

Beispiel. $3x^2 + 3y^2 - 42y + 147 = 0.$

469. $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - \dfrac{s(Lx + My + N)}{\sqrt{L^2 + M^2}} = 0.$

Beispiel. $(x - \frac{3}{2})^2 + (y - 2)^2 = \frac{49}{4}.$

470. Betrachtet man die Schenkel des rechten Winkels als Achsen des Koordinatensystems, so erhält man als Gleichung des geometrischen Ortes

$$x^2 + y^2 = \frac{s^2}{4}.$$

471. $y^2 = \dfrac{2rm}{m + n} x - x^2.$

Beispiele. a) $y^2 = 10x - x^2$;

b) $y^2 = 7{,}8x - x^2.$

472. Die Endpunkte liegen in einem Kreise, dessen Gleichung $y^2 = 4rx - x^2$ ist.

473. Die Gleichung des geometrischen Ortes ist

$$y^2 + x^2 \pm yr = 0,$$

d. h. die Schnittpunkte liegen auf zwei kongruenten Kreisen, welche von dem gegebenen Kreise und der X-Achse berührt werden. Die Radien der Kreise sind gleich $\frac{r}{2}$, die Mittelpunktskoordinaten

$$\left(0, -\frac{r}{2}\right) \text{ und } \left(0, +\frac{r}{2}\right).$$

474. Der geometrische Ort wird ebenfalls von zwei Kreisen gebildet, welche der Gleichung

$$x^2 + y^2 \pm rx = 0$$

entsprechen.

475. Die Gleichung des geometrischen Ortes ist

$$2yy_1 + 2xx_1 = x_1^2 + y_1^2 + r^2$$

d. h. die Mittelpunkte liegen auf einer Geraden, welche auf der Verbindungslinie der Punkte (0, 0) und (x_1, y_1) lotrecht steht.

476. Sind x_1, y_1 die Koordinaten eines Punktes, von dem aus die beiden Kreise unter dem Winkel 2α erscheinen, so lassen sich die Relationen

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - r^2}}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{r_1}{\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (y_1 - b_1)^2 - r_1^2}}$$

aufstellen, aus denen man als Gleichung des Ortes

$$x_1^2 + y_1^2 - \frac{2a_1r^2x_1}{r^2 - r_1^2} - \frac{2b_1r^2y_1}{r^2 - r_1^2} + \frac{(a_1^2 + b_1^2)r^2}{r^2 - r_1^2} = 0$$

erhält.

477. Der Anforderung genügen zwei Punkte, nämlich die Schnittpunkte der beiden Kreise

$$9x^2 + 9y^2 + 224x + 32y - 800 = 0,$$
$$7x^2 + 7y^2 - 160y + 400 = 0.$$

478. Die Gerade falle mit der X-Achse zusammen, der Punkt L mit dem Koordinatenanfangspunkte. Bezeichnen wir die Strecke LM mit a, MN mit b, so ergeben sich für den geometrischen Ort die Relationen

$$y = 0, \quad x^2 + y^2 - \frac{2a^2x}{a - b} + \frac{a^2(a + b)}{a - b} = 0.$$

Derselbe wird also von der X-Achse und von einem Kreise gebildet, dessen Mittelpunkt auf der X-Achse liegt.

479. $x^2 + y^2 - \frac{2}{3}y\sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = 0.$

480. Die festliegende Grundlinie möge die in Lösung 170 angegebene Lage haben, dann ist die Gleichung des geometrischen Ortes

$$y^2 + x^2 - cx \pm cy \cdot \cot C = 0,$$

d. h. der Ort besteht aus zwei Kreisen, welche kongruent sind und deren Mittelpunkte symmetrisch zur X-Achse liegen.

481. Der Mittelpunkt bewegt sich auf einem Kreise, dessen Gleichung ist

$$x^2 + y^2 - cx + cy \operatorname{tg}\frac{C}{2} = 0.$$

482. Man findet als Gleichung des Ortes

$$N(x^2 + y^2) + r^2(Lx + My) = 0.$$

Bewegt sich also der Pol P auf einer Geraden fort, so beschreibt der kreisverwandte Pol einen Kreis, der durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises geht.

483. $$x^2 + y^2 - \frac{r^2(r^2 - 2a_1x)}{r_1^{\,2} - a_1^{\,2}} = 0.$$

Der kreisverwandte Pol bewegt sich also ebenfalls auf der Peripherie eines Kreises fort, dessen Mittelpunkt auf der Centrale der beiden gegebenen Kreise liegt.

484. Für $a_1 = r_1$ erhält man

$$2a_1x = r^2.$$

Geht also K_1 der Ort des Poles durch den Mittelpunkt von K, so beschreibt der kreisverwandte Pol eine Gerade. Vergl. Lös. 482.

485. a) Der Gleichung $K_1 + kK_2 = 0$ entspricht ein System von Kreisen, die alle durch die Schnittpunkte der Kreise $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ hindurchgehen. Ein solches System existiert auch noch, wenn die Schnittpunkte der beiden Fundamentalkreise imaginär sind.

b) Die Gleichung des Mittelpunktes des Kreises

$$K_1 + fK_2 = 0 \text{ ist } M_1 + fM_2 = 0.$$

486. Gehen K_1 und K_2 bei Einsetzung von x_1, y_1 über in K_1', K_2', so erhält man zur Bestimmung von k die Gleichung

$$K_1' + kK_2' = 0.$$

Also ist die Gleichung des gesuchten Kreises

$$K_1K_2' - K_2K'_1 = 0.$$

Beispiele.

a) $7(x^2 + y^2) - 18x - 28y = 0$;

b) $139(x^2 + y^2) - 916x - 1730y + 1849 = 0$.

487. Zur Bestimmung von k erhält man die Gleichung

$$(A_1 + kA_2)^2 + (B_1 + kB_2)^2 - 4(C_1 + kC_2)(1 + k) = 4r^2(1 + k)^2.$$

Da diese vom zweiten Grade ist, so ergeben sich zwei Kreise, welche der Anforderung genügen;

Beispiel.

$$6(x^2 + y^2 - 6x - 2y - 26) - (5 \pm \sqrt{69})(x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11) = 0.$$

488. Màn findet den Wert von k aus der Gleichung

$$L(A_1 + kA_2) + M(B_1 + kB_2) - 2N(1 + k) = 0.$$

Beispiel. $(k = -\frac{7}{6})$.

$$x^2 + y^2 + 50x + 88y + 230 = 0.$$

489. Es ergeben sich zwei Werte für k, also lassen sich zwei Kreise konstruieren.

$(k = \frac{18}{7})$. $25x^2 + 25y^2 - 80x - 494y + 64 = 0$.

$(k = -\frac{4}{3})$. $x^2 + y^2 - 36x - 46y + 324 = 0$.

490. Die Koordinaten der Schnittpunkte sind:

$$x = \frac{a^2 + r^2 - r_1^{\,2}}{2a},$$

$$y = \pm \frac{1}{2a} \sqrt{(r + r_1 + a)(-r + r_1 + a)(r - r_1 + a)(r + r_1 - a)}.$$

Daraus folgt: Die beiden Schnittpunkte der Kreise sind reell, wenn die drei letzten Faktoren unter dem Wurzelzeichen positiv sind, also wenn $r_1 + a > r$, $r + a > r_1$, $r + r_1 > a$. Aus den drei Strecken r, r_1, a läfst sich in diesem Falle ein Dreieck konstruieren. Die beiden Schnittpunkte fallen zusammen, wenn einer jener Faktoren gleich 0 ist. Die beiden Kreise berühren sich also wenn $r + r_1 = a$, oder $a = \pm(r - r_1)$ ist. Die beiden Schnittpunkte sind imaginär, wenn einer jener drei Faktoren negativ ist, also wenn $r + r_1 < a$ oder $r_1 + a < r$ oder $r + a < r_1$. Im ersten Falle liegen beide Kreise getrennt, in den beiden letzten Fällen schliefst der eine Kreis den andern ein. Für $a = 0$ endlich wird $x = \infty$, $y = \infty$, die beiden Kreise sind konzentrisch.

491. Die beiden Kreise durchschneiden sich rechtwinklig.

492. Die gemeinschaftliche Sehne entspricht der Gleichung

$$K_1 - K_2 = 0.$$

Beispiele. a) $6x - 2y - 5 = 0$;

b) $12x + 17y - 51 = 0$.

Die Radikalachse ist reell, obwohl die beiden Kreise sich in zwei imaginären Punkten durchschneiden.

493. Die Radikalachse zweier konzentrischen Kreise fällt mit der unendlich fernen Geraden zusammen.

494. Die Gleichung der Radikalachse ist

$$(a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y = \frac{r_1^2 + b_2^2 - b_1^2}{2}.$$

Die Radikalachse des Kreises und des Punktes halbiert den Abstand des Punktes von seiner Polare und ist der letzteren parallel.

Beispiel. $156x + 136y = 537$.

495. $$14x - 4y + 31 = 0.$$

Die Radikalachse der beiden Punkte steht auf der Verbindungslinie derselben im Halbierungspunkte lotrecht.

496. Die gerade Linie ist als ein Kreis mit unendlich grofsem Durchmesser anzusehen, dessen Mittelpunkt in der Unendlichkeit liegt, sie entspricht also der Gleichung

$$x^2 + y^2 + \frac{A_1 + kA_2}{1+k}x + \frac{B_1 + kB_2}{1+k}y + \frac{C_1 + kC_2}{1+k} = 0,$$

wenn $k = -1$ ist. Subtrahiert man von dieser Gleichung die des Kreises K

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0,$$

so erhält man

$$(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + C_1 - C_2 = 0.$$

Die Radikalachse fällt also mit der Geraden L zusammen.

497. Man findet in ganz ähnlicher Weise wie in der vorhergehenden Lösung, dafs die Radikalachse mit der Geraden L zusammenfällt.

498. $$K_1 - \frac{m^2}{n^2}K_2 = 0.$$

Der geometrische Ort ist ein Kreis, welcher durch die Schnittpunkte der gegebenen Kreise hindurchgeht.

499. Das Resultat findet man aus der vorigen Lösung, wenn man $m = n$ setzt, also $K_1 - K_2 = 0$. Der geometrische Ort fällt mit der Radikalachse zusammen.

500. k ist gleich dem Verhältnis der Quadrate der Tangenten, welche sich von einem beliebigen Punkte des Kreises $K_1 - kK_2 = 0$ an die Kreise $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ ziehen lassen.

501. Jede gemeinschaftliche Tangente der beiden Kreise wird durch die Radikalachse halbiert.

502. Die Gleichungen der Radikalachsen sind:

$$K_1 - K_2 = 0,\ K_2 - K_3 = 0,\ K_3 - K_1 = 0.$$

Da die Gleichung

$$K_1 - K_2 + K_2 - K_3 + K_3 - K_1 = 0$$

eine identische ist, so müssen sich diese drei Geraden in einem Punkte schneiden.

503. Die Gleichungen der drei Radikalachsen sind:

$$20x + 14y - 97 = 0,$$
$$2x + 14y + 35 = 0,$$
$$11x + 14y - 31 = 0;$$

demnach die Koordinaten des Radikalcentrums:

$$x_1 = 7\tfrac{1}{3},\ y_1 = -3\tfrac{23}{42}.$$

504. $x_1 = -4\tfrac{6}{7},\ y_1 = -\tfrac{83}{112};$
$t = 4{,}487873\ldots$

505. $(x - 7\tfrac{1}{3})^2 + (y + 3\tfrac{23}{42})^2 = 121\tfrac{977}{1764}.$

506. Die Gleichungen der Radikalachsen sind:

$$8x + 3y + 48 = 0,\ 20x - 2y + 23 = 0,$$
$$-4x + 8y + 73 = 0;$$

die Koordinaten des Radikalcentrums:

$$x_1 = -2\tfrac{13}{76},\ y_1 = -10\tfrac{4}{19}.$$

507. $(x - 1\tfrac{11}{56})^2 + (y + 3\tfrac{27}{56})^2 = 41\tfrac{1041}{1568}.$

508. $x_1 = -1\tfrac{4}{19},\ y_1 = -2\tfrac{31}{38}.$

509. $(x + 2\tfrac{1}{6})^2 + (y - \tfrac{5}{18})^2 = 10\tfrac{125}{162}.$

510. Man beschreibt einen Hilfskreis, der die beiden Kreise K_1 und K_2 schneidet, zieht die Radikalachsen des Hilfskreises und jedes der gegebenen Kreise und fällt von dem Schnittpunkte dieser Geraden ein Lot auf die Centrale von K_1 und K_2. Dieses Lot ist die gesuchte Radikalachse.

511. $$x^2 + y^2 - 2kx + f^2 = 0.$$

Erteilt man k alle möglichen reellen Werte, so erhält man die verschiedenen Kreise des Büschels. Ist die Konstante f^2 positiv, so sind die Schnittpunkte der Kreise mit der Radikalachse imaginär, dagegen sind dieselben reell, wenn f^2 negativ ist.

512. Man erhält die Punktkreise des Kreisbüschels, wenn man $k = \pm f$ setzt, denn in diesem Falle geht die Gleichung über in $(x \mp f)^2 + y^2 = 0$. Dieser Gleichung entsprechen zwei unendlich kleine Kreise (Punkte), welche symmetrisch zur Radikalachse auf der X-Achse liegen.

513. Das Kreisbüschel besitzt nur dann Punktkreise, wenn f^2 in der Gleichung $x^2 + y^2 - 2kx + f^2 = 0$ einen positiven Wert hat, d. h. wenn die Schnittpunkte der Kreise und der Radikalachse imaginär sind. Sind die letzteren Schnittpunkte reell, so gehören zu dem Büschel keine Punktkreise.

514. Sind die Koordinaten der Schnittpunkte $(0, + h)$ und $(0, - h)$, so ist die verlangte Gleichung

$$x^2 + y^2 - 2kx - h^2 = 0.$$

515. $x^2 + y^2 - 2kx + f^2 = 0.$

516. Der Beweis folgt aus der Identität

$$2\left\{\left(k + \sqrt{k^2 - f^2}\right)\left(k - \sqrt{k^2 - f^2}\right) - f^2\right\}$$
$$= \left(k + \sqrt{k^2 - f^2} + k - \sqrt{k^2 - f^2}\right)(f - f).$$

Vergl. Lösung 189. Die Kreise des Büschels schneiden demnach die X-Achse in Punktepaaren einer Involution.

517. $x^2 + y^2 - \dfrac{x_1^2 + y_1^2 + f^2 - t^2}{x_1} x + f^2 = 0.$

518. Zieht man von einem Punkte P der Radikalachse des ursprünglichen Büschels Tangenten an alle Kreise desselben, so liegen die Berührungspunkte auf der Peripherie eines Kreises, der sämtliche Kreise lotrecht durchschneidet. Sind $0, k_1$ die Mittelpunktskoordinaten dieses Kreises, so ist die Gleichung desselben

$$x^2 + y^2 - 2k_1 y - f^2 = 0.$$

Dieser Relation aber entspricht, wenn man k_1 alle möglichen reellen Werte erteilt, d. h. wenn man P auf der Radikalachse fortgleiten läßt, ebenfalls ein Kreisbüschel.

519. Da die Gleichung des konjugierten Büschels

$$x^2 + y^2 - 2k_1 y - f^2 = 0$$

ist, so ist ersichtlich, daß alle Kreise desselben durch die Punktkreise des ursprünglichen Büschels gehen müssen. Die Centrale des ursprünglichen Büschels ist Radikalachse des konjugierten.

520. Die Koordinaten der Schnittpunkte des zweiten Büschels sind $x_1 = \pm f$, $y_1 = 0$, demnach entsprechen die Polaren dieser Punkte bezüglich der Kreise des ersten Büschels der Gleichung

$$x \mp f = 0.$$

Die Polaren eines Schnittpunktes bezüglich der Kreise des konjugierten Büschels fallen also zusammen.

521. Der gesuchte Kreis des Büschels entspricht der Gleichung

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2 + b^2 + f^2 - r^2}{a} x + f^2 = 0.$$

522. Die Polaren bilden ein Strahlenbüschel, dessen Gleichung $xx_1 + yy_1 + f^2 - k(x + x_1) = 0$ ist. Der Mittelpunkt des Strahlenbüschels wird der harmonische Pol des Punktes (x_1, y_1) genannt.

523. a) Die Koordinaten des harmonischen Poles sind:

$$x = -x_1, \; y = \frac{x_1^2 - f^2}{y_1}.$$

b) Der Abstand der beiden Pole wird durch die Radikalachse halbiert.

c) Die Verbindungslinie wird in einer involutorischen Punktreihe geschnitten.

524. Die Gleichung des Büschels ist

$$y^2 + x^2 - \frac{x_1^2 + y_1^2 - f^2}{y_1} y - f^2 = 0.$$

Die Centrale aller Kreise desselben ist die Y-Achse und die Schnittpunkte aller Kreise sind die Punktkreise des ursprünglichen Büschels. Das Büschel ist also das dem ursprünglichen konjugierte. Vergl. Aufgabe 518.

525. Zieht man von einem Punkte P der Radikalachse Sekanten durch die Mittelpunkte der gegebenen Kreise, so liegen die Schnittpunkte derselben mit den Peripherien auf der Peripherie eines Kreises, der der Aufgabe genügt. Sind die Koordinaten des Punktes P: 0, b, so ist die Gleichung des betreffenden Kreises

$$\left(y + \frac{k_1 k_2}{b}\right)^2 + (x - (k_1 - k_2))^2 = k_1^2 + k_2^2 + f^2 + \frac{k_1^2 k_2^2}{b^2}.$$

526. Der Punkt P der Radikalachse war in der vorhergehenden Lösung beliebig gewählt. Lassen wir denselben auf der Radikalachse fortgleiten, so ändert sich der Radius des gefundenen Kreises und die Ordinate des Mittelpunktes, dagegen bleibt die

Abscisse unverändert. Der geometrische Ort des Mittelpunktes ist demnach eine Gerade, welche der Radikalachse von K_1 und K_2 parallel läuft; sie wird die sekundäre Radikalachse der Kreise K_1 und K_2 genannt. Die Gleichung derselben ist

$$x = k_1 - k_2.$$

527. Alle Kreise, welche der Gleichung

$$\left(y + \frac{k_1 k_2}{b}\right)^2 + (x - (k_1 - k_2))^2 = k_1^2 + k_2^2 + f^2 + \frac{k_1^2 k_2^2}{b^2}$$

für beliebige Werte von b entsprechen, gehen durch die beiden Punkte

$$(k_1 - k_2 \pm \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + f^2},\ 0),$$

sie bilden also ein Büschel und zwar ist die X-Achse die Radikalachse desselben.

528. Die Gleichungen der sekundären Radikalachsen der drei Kreise sind:

$$2x(a_2 - a_1) + 2y(b_2 - b_1) - (r_2^2 - r_1^2 + a_2^2 - a_1^2 + b_2^2 - b_1^2) = 0,$$
$$2x(a_3 - a_2) + 2y(b_3 - b_2) - (r_3^2 - r_2^2 + a_3^2 - a_2^2 + b_3^2 - b_2^2) = 0,$$
$$2x(a_1 - a_3) + 2y(b_1 - b_3) - (r_1^2 - r_3^2 + a_1^2 - a_3^2 + b_1^2 - b_3^2) = 0.$$

Da die Summation derselben die Identität $0 = 0$ liefert, so schneiden sich diese drei Geraden in einem Punkte.

529. Die Gleichungen der sekundären Radikalachsen sind:

$$x + \tfrac{1}{2} = 0,$$
$$6y + 13x - 36\tfrac{1}{2} = 0,$$
$$6y + 8x - 39 = 0;$$

die Koordinaten des Schnittpunktes derselben:

$$x_1 = -\tfrac{1}{2},\ y_1 = 7\tfrac{1}{6};$$

demnach die Gleichung des gesuchten Kreises:

$$(x + \tfrac{1}{2})^2 + (y - 7\tfrac{1}{6})^2 = \tfrac{2290}{36}.$$

530. Man entwickelt zunächst die Gleichungen der Berührungssehnen eines der beiden gegebenen Kreise, berechnet sodann die Koordinaten der Berührungspunkte und bestimmt mit Hilfe derselben die Gleichungen der Tangenten.

Die Gleichung der Berührungssehne der äufseren Tangenten ist für den ersten Kreis

$$(a_2 - a_1)(x - a_1) + (b_2 - b_1)(y - b_1) = r_1(r_1 - r_2),$$

die der Berührungssehne der inneren Tangenten

$$(a_2 - a_1)(x - a_1) + (b_2 - b_1)(y - b_1) = r_1(r_1 + r_2).$$

Beispiele. a) Die Gleichungen der Berührungssehnen für den ersten Kreis sind:

$$x + y = 19, \quad x + y = 17,$$

die Koordinaten der Berührungspunkte:

$$x_{1_2} = \frac{21 \pm \sqrt{31}}{2}, \quad y_{1_2} = \frac{17 \mp \sqrt{31}}{2},$$

$$x_{3_4} = \frac{19 \pm \sqrt{23}}{2}, \quad y_{3_4} = \frac{15 \mp \sqrt{23}}{2}.$$

Demnach sind die Gleichungen der äufseren Tangenten:

$$x(\sqrt{31} - 1) - y(\sqrt{31} + 1) = 12 + 2\sqrt{31},$$

$$-x(\sqrt{31} + 1) + y(\sqrt{31} - 1) = 12 - 2\sqrt{31};$$

dagegen die der inneren Tangenten:

$$x(3 - \sqrt{23}) + y(3 + \sqrt{23}) = 28 - 2\sqrt{23},$$

$$x(3 + \sqrt{23}) + y(3 - \sqrt{23}) = 28 + 2\sqrt{23}.$$

b) Die Gleichung der Berührungssehne des ersten Kreises für die äufseren Tangenten ist:

$$x + 3y = 10,$$

die Koordinaten der Berührungspunkte:

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 3;$$

$$x_2 = 8\tfrac{1}{5}, \quad y_2 = \tfrac{3}{5};$$

demnach die Gleichungen der äufseren Tangenten:

$$x - 1 = 0, \quad 4x - 3y - 31 = 0.$$

Die Gleichung der Berührungssehne des ersten Kreises für die inneren Tangenten ist

$$x + 3y + 14 = 0.$$

Da diese den ersten Kreis in zwei imaginären Punkten schneidet, so lassen sich keine reellen inneren Tangenten konstruieren.

531. Die Koordinaten des äufseren Ähnlichkeitspunktes sind:

$$x_1 = \frac{a_2 r_1 - a_1 r_2}{r_1 - r_2}, \quad y_1 = \frac{b_2 r_1 - b_1 r_2}{r_1 - r_2},$$

die des inneren:

$$x_2 = \frac{a_2 r_1 + a_1 r_2}{r_1 + r_2}, \quad y_2 = \frac{b_2 r_1 + b_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Beispiel. $x_1 = -49, \quad y_1 = -57;$

$x_2 = 5\frac{6}{11}, \qquad y_2 = -2\frac{5}{11}.$

532. Man erhält

$$x_1 = \infty,\ y_1 = \infty;\ x_2 = \frac{a_1 + a_2}{2}, \quad y_2 = \frac{b_1 + b_2}{2},$$

d. h. der äufsere Ähnlichkeitspunkt liegt in der Unendlichkeit, der innere halbiert die Centrale der beiden Kreise.

533. Aus den Werten für die Koordinaten der Ähnlichkeitspunkte ergiebt sich:
Berühren sich die beiden Kreise von innen, so fällt der äufsere Ähnlichkeitspunkt mit dem Berührungspunkte zusammen, berühren sie sich dagegen von aufsen, so liegt der innere Ähnlichkeitspunkt in dem Berührungspunkte.

534. Da r_2 in diesem Falle gleich Null ist, so erhält man

$$x_1 = x_2 = a_2,\ y_1 = y_2 = b_2.$$

Beide Ähnlichkeitspunkte fallen also mit dem Punkte zusammen.

535. Die unendlich kleinen Radien sind gleich, daher halbiert der innere Ähnlichkeitspunkt den Abstand der beiden Punkte, während der äufsere auf der Verbindungslinie derselben in der Unendlichkeit liegt.

536. Die Koordinaten der Ähnlichkeitspunkte sind:

$$x_1 = \frac{r_1 A + a_1 \sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \qquad y_1 = \frac{r_1 B + b_1 \sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}};$$

$$x_2 = \frac{-r_1 A + a_1 \sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \ y_2 = \frac{-r_1 B + b_1 \sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Die Ähnlichkeitspunkte fallen also mit den beiden Punkten zusammen, in denen der zu der Geraden lotrechte Durchmesser die Peripherie des Kreises durchschneidet.

537. Die Centrale wird durch jeden der Ähnlichkeitspunkte im Verhältnis der Radien geteilt. Sind demnach $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ die Gleichungen der Mittelpunkte, so sind $r_2 A_1 - r_1 A_2 = 0$,

$r_2 A_1 + r_1 A_2 = 0$ die der Ähnlichkeitspunkte. Die Ähnlichkeitspunkte und die Mittelpunkte sind also harmonische Punktepaare.

538. Der gesuchte Kreis gehört sowohl zu dem Büschel

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 + k_1\{(a_2 - a_1)(x - a_1) + \\ + (b_2 - b_1)(y - b_1) - r_1(r_1 - r_2)\} = 0,$$

als auch zu dem Büschel

$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2^2 + k_2\{(a_1 - a_2)(x - a_2) + \\ + (b_1 - b_2)(y - b_2) - r_2(r_2 - r_1)\} = 0.$$

Zur Berechnung von k_1 und k_2 ergeben sich demnach die Relationen:

$$k_1 + k_2 = -2$$

$$a_1^2 + b_1^2 - r_1^2 - a_1 k_1 (a_2 - a_1) - b_1 k_1 (b_2 - b_1) - k_1 r_1 (r_1 - r_2) \\ = a_2^2 + b_2^2 - r_2^2 - a_2 k_2 (a_1 - a_2) - b_2 k_2 (b_1 - b_2) - k_2 r_2 (r_2 - r_1),$$

woraus folgt: $k_1 = -1,\ k_2 = -1.$

Die Gleichung des gesuchten Kreises ist demnach

$$x^2 + y^2 - x(a_1 + a_2) + y(b_1 + b_2) + a_1 a_2 + b_1 b_2 - r_1 r_2 = 0.$$

Der Mittelpunkt dieses Kreises halbiert die Centrale der gegebenen Kreise K_1 und K_2.

539. Die Koordinaten der äufseren Ähnlichkeitspunkte sind

$$\text{von } K_2 \text{ und } K_3:\ x_1 = \frac{a_3 r_2 - a_2 r_3}{r_2 - r_3},\quad y_1 = \frac{b_3 r_2 - b_2 r_3}{r_2 - r_3},$$

$$\text{von } K_3 \text{ und } K_1:\ x_2 = \frac{a_1 r_3 - a_3 r_1}{r_3 - r_1},\quad y_2 = \frac{b_1 r_3 - b_3 r_1}{r_3 - r_1},$$

$$\text{von } K_1 \text{ und } K_2:\ x_3 = \frac{a_2 r_1 - a_1 r_2}{r_1 - r_2},\quad y_3 = \frac{b_2 r_1 - b_1 r_2}{r_1 - r_2}.$$

Da bei Einsetzung dieser Werte die Gleichung

$$y_1 (x_2 - x_3) + y_2 (x_3 - x_1) + y_3 (x_1 - x_2) = 0$$

eine identische wird, so liegen die drei Punkte in einer Geraden. Die Gleichung dieser Geraden ist

$$y\{r_1(a_3 - a_2) + r_2(a_1 - a_3) + r_3(a_2 - a_1)\} - x\{r_1(b_3 - b_2) + r_2(b_1 - b_3) \\ + r_3(b_2 - b_1)\} = r_1(a_3 b_2 - a_2 b_3) + r_2(a_1 b_3 - a_3 b_1) + r_3(a_2 b_1 - a_1 b_2).$$

540. Bildet man die Gleichung der Verbindungslinie zweier innern Ähnlichkeitspunkte, so findet man, dafs derselben die Koordinaten eines äufsern Ähnlichkeitspunktes genügen. Daraus folgt:

Verbindet man zwei innere Ähnlichkeitspunkte durch eine Gerade, so geht dieselbe durch einen äuſseren Ähnlichkeitspunkt.

541. Die Gleichungen der vier Ähnlichkeitsachsen sind:

$$9y - 10x - 40 = 0, \qquad 61y - 130x + 200 = 0,$$
$$81y - 130x + 200 = 0, \; 13y - 10x - 40 = 0.$$

542. Der Punkt P_1 ist ein Ähnlichkeitspunkt der Kreise K_1 und K_3, P_2 ein Ähnlichkeitspunkt der Kreise K_2 und K_3. Die Verbindungslinie dieser beiden Punkte muſs demnach (nach Lös. 540) die Centrale der Kreise K_1 und K_2 in einem Ähnlichkeitspunkte dieser beiden letzteren Kreise schneiden. Wann wird dieser Schnittpunkt der innere, wann der äuſsere Ähnlichkeitspunkt der beiden gegebenen Kreise sein?

543. Man verbindet den Punkt P mit den Ähnlichkeitspunkten der gegebenen Kreise K_1 und K_2 und verlängert diese Verbindungslinien bis zum Durchschnitt mit der Peripherie von K_1. Auf diese Weise erhält man die Punkte, in denen der Kreis K_1 von dem gesuchten Kreise berührt wird. Der gesuchte Kreis kann die beiden gegebenen einschlieſsend oder ausschlieſsend oder den einen einschlieſsend den andern ausschlieſsend berühren.

544. $$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1^2 \mp \frac{r_1}{r_2}\{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-r_2^2\}=0.$$

Das negative Zeichen ist zu setzen, wenn der äuſsere Ähnlichkeitspunkt, das positive, wenn der innere Ähnlichkeitspunkt Mittelpunkt des Kreises ist.

545. Zur Bestimmung der Mittelpunktskoordinaten und des Radius des gesuchten Kreises dienen die Gleichungen:

$$x_1 = \frac{a_2 r_1 - a_1 r_2}{r_1 - r_2}, \quad y_1 = \frac{b_2 r_1 - b_1 r_2}{r_1 - r_2},$$
$$x_2 = \frac{a_2 r_1 + a_1 r_2}{r_1 + r_2}, \quad y_2 = \frac{b_2 r_1 + b_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Berechnet man aus drei Gleichungen die gesuchten Gröſsen und setzt die Werte derselben in die vierte Gleichung ein, so findet man, daſs die Lösung nur dann möglich ist, wenn

$$y_1(x_2 - a_1) + y_2(a_1 - x_1) + b_1(x_1 - x_2) = 0,$$

d. h. wenn die gegebenen Punkte mit dem Mittelpunkte von K_1 in einer Geraden liegen. Die Gleichung des gesuchten Kreises ist

$$\left(x - \frac{2x_1x_2 - a_1(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2 - 2a_1}\right)^2 + \left(y - \frac{2y_1y_2 - b_1(y_1 + y_2)}{y_1 + y_2 - 2b_1}\right)^2$$
$$= \frac{(x_1 - x_2)^2 r_1^2}{(x_1 + x_2 - 2a_1)^2} = \frac{(y_1 - y_2)^2 r_1^2}{(y_1 + y_2 - 2b_1)^2}.$$

Beispiel. $(x - 6\tfrac{1}{3})^2 + (y - 25\tfrac{1}{3})^2 = \dfrac{121}{9}$.

546. Ist $(x - a_2)^2 + y^2 = r_2^2$ die Gleichung des gesuchten Kreises, so sind die Unbekannten a_2, r_2 bestimmt durch die Gleichungen

$$x_1 = \frac{a_2 r_1}{r_1 - r_2}, \ (a - a_2)^2 + b^2 = r_2^2.$$

Die Lösung ist demnach nur dann möglich, wenn

$$r_1^2\{(x_1 - a)^2 + b^2\} - b^2 x_1^2 \geqq 0,$$

d. h. wenn die Verbindungslinie von P und P_1 den gegebenen Kreis schneidet oder berührt. Im ersten Falle ergeben sich zwei Kreise, im zweiten nur ein einziger.

547. Die Gleichung des gesuchten Kreises ist

$$\left(x - \frac{a_2 r_1^2}{r_1^2 - r_2^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a_2 r_1 r_2}{r_1^2 - r_2^2}\right)^2.$$

Die Winkel, unter denen die gegebenen Kreise von einem Punkte der Peripherie dieses Kreises gesehen werden, sind gleich. Vergl. Lös. 476.

548. Alle drei Radikalachsen entsprechen der Gleichung

$$2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y - (a_1^2 + b_1^2 - r_1^2) + (a_2^2 + b_2^2 - r_2^2) = 0,$$

sie fallen also zusammen. Die drei Kreise gehören zu einem Büschel.

549. Die Polaren des äufseren Ähnlichkeitspunktes sind:

$$(x - a_1)(a_2 - a_1) + (y - b_1)(b_2 - b_1) = r_1(r_1 - r_2),$$
$$(x - a_2)(a_2 - a_1) + (y - b_2)(b_2 - b_1) = r_2(r_1 - r_2);$$

die des inneren Ähnlichkeitspunktes:

$$(x - a_1)(a_2 - a_1) + (y - b_1)(b_2 - b_1) = r_1(r_1 + r_2),$$
$$(x - a_2)(a_2 - a_1) + (y - b_2)(b_2 - b_1) = r_2(r_1 + r_2).$$

Vergleicht man diese Relationen mit der Gleichung der Radikalachse beider Kreise, so findet man leicht, dafs sowohl die Polaren des äufseren als die des innern Ähnlichkeitspunktes bezüglich der

Kreise K_1 und K_2 auf entgegengesetzten Seiten der Radikalachse liegen und dafs ihr Abstand von dieser Linie halbiert wird. Ferner ersieht man, dafs die Polaren der Ähnlichkeitspunkte bezüglich des Kreises K_1 denselben Abstand von einander haben, wie die Polaren derselben Punkte bezüglich des Kreises K_2.

550. Man findet

$$K_2 \equiv (x-1)^2 + (y-1)^2 - 9 = 0,$$
$$K_3 \equiv (x-10)^2 + (y-8)^2 - 36 = 0.$$

551. Die Gerade, welche die Punkte P_1, P_2 verbindet, sei die Y-Achse, das im Halbierungspunkte von $P_1 P_2$ errichtete Lot die X-Achse, dann gehört der gesuchte Kreis dem Büschel $x^2 + y^2 - 2kx - f^2 = 0$ an. Ist $y = Ax + b$ die Gleichung der Geraden, welche berührt werden soll, so erhält man das Resultat

$$x^2 + y^2 - 2\left\{bA \pm \sqrt{(b^2 - f^2)(1 + A^2)}\right\} x - f^2 = 0.$$

Es lassen sich also zwei Kreise konstruieren.

Beispiel. $x^2 + y^2 - 2\left\{35 \pm 3\sqrt{130}\right\} x - 4 = 0.$

552. Erteilt man dem Koordinatensystem dieselbe Lage wie in der vorhergehenden Lösung, so erhält man zur Bestimmung der Gröfse k die Relation

$$a_1^2 - 2a_1 k + b_1^2 - r_1^2 - f^2 = 2r_1\sqrt{f^2 + k^2},$$

wenn $(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2$ die Gleichung des gegebenen Kreises ist. Man kann demnach zwei Kreise konstruieren, welche der Aufgabe genügen.

Beispiel. $x^2 + y^2 = 9;\ x^2 + y^2 - 8x - 9 = 0.$

553. Nimmt man die Gerade G_1 zur X-Achse, den Schnittpunkt der beiden Geraden zum Koordinatenanfangspunkt, so ist die Gleichung der Geraden $G_2 : y = Mx$. Die Konstanten in der Gleichung des gesuchten Kreises

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

lassen sich finden durch die drei Relationen

$$(A + BM)^2 = 4C(1 + M^2),\quad A^2 = 4C,$$
$$x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C = 0.$$

Die Lösung liefert zwei Kreise.

Beispiel. $x^2 + y^2 - 14x - 10y + 49 = 0$,

$$x^2 + y^2 - \frac{146}{7}x - \frac{730}{49}y + \frac{5329}{49} = 0.$$

554. Die gerade G_1 falle mit der X-Achse zusammen, das von dem Mittelpunkte des Kreises K_1 auf G_1 gefällte Lot mit der Y-Achse; die Gleichung von K_1 sei demnach $x^2 + (y - b_1)^2 = r_1{}^2$. Zur Bestimmung der Konstanten in der Gleichung des gesuchten Kreises

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

dienen folgende Gleichungen:

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2, \quad r = b,$$
$$(r \pm r_1)^2 = a^2 + (b_1 - b)^2.$$

Vier Kreise lassen sich bestimmen.

Beispiel.

$$\left(x - \frac{69}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{338}{49}\right)^2 = \left(\frac{338}{49}\right)^2,$$
$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4,$$
$$(x - 15 \mp 8\sqrt{3})^2 + (y - 74 \mp 40\sqrt{3})^2 = (74 \pm 40\sqrt{3})^2.$$

555. Die Mittelpunktskoordinaten a, b und der Radius r des gesuchten Kreises lassen sich ermitteln mit Hilfe der Gleichungen:

$$a^2 + b^2 = r^2,$$
$$(b_1 - b)^2 + a^2 = (r \pm r_1)^2,$$
$$(b_2 - b)^2 + (a_2 - a)^2 = (r \pm r_2)^2.$$

Die Lösung wird im allgemeinen vier Kreise liefern.

556. Man findet die Mittelpunktskoordinaten a, b und den Radius r mittels der Gleichungen:

$$(b_1 - b)^2 + a^2 = (r \pm r_1)^2, \; b = r,$$
$$b \cos \varphi_1 + a \cos \varphi_1 \operatorname{tg}\left(\frac{90 - \varphi_1}{2}\right) = p_1 \operatorname{tg}\left(\frac{90 - \varphi_1}{2}\right);$$

also ergeben sich im ganzen vier Kreise.

557. Zur Bestimmung der Konstanten in der Gleichung des gesuchten Kreises

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

benutzt man die Relationen:

$$r = b, \; (b_1 - b)^2 + a^2 = (r \pm r_1)^2,$$
$$(b_2 - b)^2 + (a_2 - a)^2 = (r \pm r_2)^2.$$

Man erhält also im ganzen acht Kreise.

Beispiel.

$$\left(x-\frac{25\pm 5\sqrt{15}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{102\pm 25\sqrt{15}}{4}\right)^2=\left(\frac{102\pm 25\sqrt{15}}{4}\right)^2,$$

$$\left(x-\frac{25\pm\sqrt{85}}{4}\right)^2+\left(y-\frac{79\pm 5\sqrt{85}}{16}\right)^2=\left(\frac{79\pm 5\sqrt{85}}{16}\right)^2,$$

$$\left(x+\frac{5\mp\sqrt{51}}{2}\right)^2+\left(y-12\pm\frac{5}{4}\sqrt{51}\right)^2=\left(12\mp\frac{5}{4}\sqrt{51}\right)^2,$$

$$\left(x-\frac{23}{10}\right)^2+\left(y-\frac{1029}{200}\right)^2=\left(\frac{1029}{200}\right)^2;$$

der siebente und achte Kreis fallen zusammen.

558. Die Wurzeln der Gleichungen

$$(a-a_1)^2+(b-b_1)^2=(r\pm r_1)^2,$$
$$(a-a_2)^2+(b-b_2)^2=(r\pm r_2)^2,$$
$$(a-a_3)^2+(b-b_3)^2=(r\pm r_3)^2$$

liefern die Werte für die Mittelpunktskoordinaten und den Radius. Die doppelten Vorzeichen gestatten acht verschiedene Kombinationen. Es werden sich sonach acht verschiedene Kreise bestimmen lassen, welche die drei gegebenen Kreise berühren.

Beispiel.

$$\left(x-\frac{126\pm 3\sqrt{119}}{188}\right)^2+\left(y-\frac{233\mp 9\sqrt{119}}{94}\right)^2=\left(\frac{-366\pm 45\sqrt{119}}{188}\right)^2,$$

$$\left(x-\frac{9\pm 3\sqrt{3}}{8}\right)^2+\left(y-\frac{6\pm 3\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(\frac{13}{8}\pm\frac{15}{8}\sqrt{3}\right)^2.$$

Die übrigen vier Kreise sind imaginär.

Die Geometrie für Gymnasien und Realschulen. I. Teil: Planimetrie. Von A. Milinowski. Mit Holzschnitten im Text und 4 Figurentafeln. gr. 8. 1881. geh. ℳ 2.—

Lehrbuch der elementaren Geometrie für Gymnasien und Realschulen bearbeitet von F. J. Brockmann. Erster Theil: Die Planimetrie. 2. Aufl. Mit 139 Figuren in Holzschnitt. gr. 8. 1877. geh. ℳ 2.— Zweiter Theil: Die Stereometrie. Mit 84 Figuren in Holzschnitt. gr. 8. 1875. geh. ℳ 1.60.

Einleitung in die neuere Geometrie für die oberen Klassen der Realschulen und Gymnasien. Von W. Fuhrmann, Oberlehrer an der Realschule auf der Burg in Königsberg i. Pr. Mit 4 lithographierten Figurentafeln. gr. 8. 1881. geh. n. ℳ 1.60.

Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Für Gymnasien und Realschulen bearbeitet von F. J. Brockmann. Mit 46 Holzschnitten. 2. Aufl. gr. 8. 1880. geh. ℳ 1.60.

Leitfaden der Stereometrie mit Benutzung neuerer Anschauungsweisen. Von Dr. Hubert Müller. I. Theil: Die Grundgebilde und die einfachsten Körperformen. Mit zahlreichen Holzschnitten und drei (lithogr.) Tafeln. gr. 8. 1877. geh. ℳ 2.—

Lehrbuch der analytischen Geometrie. Bearbeitet von O. Fort u. O. Schlömilch. M. viel. Holzschn. 2 Thle. 4. Aufl. gr. 8. 1877. geh. ℳ 9.—

Einzeln: I. Theil: Analyt. Geometrie der Ebene. Von O. Fort. ℳ 4.—
II. Theil: Analyt. Geometrie des Raumes. Von O. Schlömilch. ℳ 5.—

Sammlung von Beispielen u. Aufgaben aus der Stereometrie u. Trigonom. Von Dr. F. Reidt. 2 Theile. 2. Aufl. gr. 8. 1877. geh. ℳ 7.—

Einzeln: I. Theil: Trigonometrie. ℳ 4.—
II. Theil: Stereometrie. ℳ 3.—

——— **Resultate.** 2. Auflage. I. Theil ℳ 1.80, II. Theil ℳ 1.—

Die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Zur Einführung in das Studium dargestellt von A. Harnack. gr. 8. 1881. geh. ℳ 7.60.

Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Von O. Schlömilch. 2 Theile. 2. u. 3. Aufl. gr. 8. 1874—1878. geh. ℳ 13.60.

Einzeln: I. Theil: Aufgaben aus der Differentialrechnung. 3. Aufl. 1878. ℳ 6.—
II. Theil: Aufgaben aus der Integralrechnung. 2. Aufl. 1874. ℳ 7.60.

Die Grundlehren der höheren Analysis. Ein Lehr- und Handbuch für den ersten Unterricht in der höheren Mathematik. Zum Gebrauch an Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. Von Dr. J. Wenck. Mit 140 Figuren in Holzschn. gr. 8. 1872. geh. ℳ 6.—

Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung. Von O. Hesse. 3. Auflage. gr. 8. 1876. geh. ℳ 13.—

Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene. Von O. Hesse. 3. Aufl. gr. 8. 1873. geh. ℳ 5.20.

AUFGABEN

AUS DER

ANALYTISCHEN GEOMETRIE

DER EBENE

VON

Dr. ADOLF HOCHHEIM,

PROFESSOR.

HEFT II.

DIE KEGELSCHNITTE.

ABTEILUNG I.

A. AUFGABEN.

LEIPZIG,

VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1883.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Vorwort.

Die Rücksicht auf die Bedürfnisse der preußischen Realgymnasien und Ober-Realschulen, an denen die analytische Behandlung der Kegelschnitte nach den Lehrplänen vom 11. März 1882 obligatorisch ist, bestimmt den Unterzeichneten, die Aufgaben, welche die Kegelschnitte betreffen, in zwei von einander getrennten Abteilungen erscheinen zu lassen. Die erste hier vorliegende Abteilung enthält die einfacheren Aufgaben, welche dem Standpunkte jener Schulen angemessen sind, während in der zweiten Probleme aus der projektivischen Geometrie, sowie aus der Behandlung der Kegelschnitte mit Hilfe trimetrischer Koordinaten dem Studierenden zur Bearbeitung dargeboten werden.

Magdeburg, im Februar 1883.

Ad. Hochheim.

Die Parabel.

Die Gleichung der Parabel.

1. Es soll der geometrische Ort eines Punktes P bestimmt werden, der von der Geraden $x = -\frac{p}{4}$ und dem Punkte $\left(\frac{p}{4}, 0\right)$ gleich weit entfernt ist. Welches ist die Gleichung desselben?

2. Die Achse einer Parabel fällt mit dem positiven Teile der X-Achse zusammen, der Scheitel mit dem Koordinatenanfangspunkte. Welches ist die Gleichung der Kurve, wenn der Abstand des Brennpunktes vom Scheitel derselben gleich $4\frac{1}{4}$ ist?

3. Die Koordinaten des Scheitels einer Parabel sind a, b, der Parameter derselben gleich p. Welches ist die Gleichung, wenn die Achse der X-Achse parallel läuft?

Beispiel. $a = 5$, $b = -3$, $p = 5\frac{1}{2}$.

4. Die Achse einer Parabel ist $y = -7$, die Abscisse des Scheitels $x_1 = 3$, die Koordinaten eines Punktes der Kurve $x_2 = 4$, $y_2 = -5$. Welches ist die Gleichung derselben?

5. Die Gleichung einer Parabel ist $112y^2 - 352y - 96x + 151 = 0$. Wie groß ist der Parameter derselben? Welches sind die Koordinaten des Scheitels? Welches sind die Koordinaten des Brennpunktes?

6. Was wird aus der Parabel $y^2 = px$, wenn man p bis zu Null abnehmen läßt?

7. Für welchen Punkt der Parabel $y^2 = px$ ist die Ordinate gleich dem q-fachen der Abscisse?

Beispiele. a) $y^2 = 9x$, $q = 5$;
b) $y^2 = 17x$, $q = \frac{1}{2}$.

8. Welches ist die Gleichung eines Brennstrahles der Parabel $y^2 = 5x$, wenn die Abscisse des Endpunktes $x_1 = 9$ ist? Wie weit ist der Endpunkt desselben von der Direktrix entfernt?

9. Gegeben ist die Parabel $y^2 = 10x$. Welches ist die Gleichung derselben für ein Achsensystem, dessen Koordinatenwinkel 45^0

beträgt, wenn die X-Achse des neuen Systems mit der des ursprünglichen zusammenfällt?

10. Welches ist die Polargleichung einer Parabel mit dem Parameter p, wenn die Achse derselben als die feste Achse des Koordinatensystems, der Brennpunkt aber als Pol angesehen wird?

11. Für welche Anomalie ist der Radiusvektor einer Parabel gleich dem Parameter derselben? Für welchen Wert von ϑ besitzt der Radiusvektor einen Minimalwert?

12. Die Polargleichung einer Parabel ist $\varrho = \frac{3}{1 - \cos\vartheta}$. Welcher Wert ergiebt sich für ϱ, wenn a) $\angle \vartheta = 45^0$, b) $\angle \vartheta = 60^0$ gesetzt wird?

13. Wie lang ist eine Brennpunktsehne der Parabel $\varrho = \frac{p}{2(1 - \cos\vartheta)}$, wenn dieselbe unter dem Winkel φ gegen die Achse der Parabel geneigt ist?

Beispiel. $\varrho = \frac{7}{1 - \cos\varphi}$, $\angle \varphi = 20^0$.

14. Durch den Brennpunkt einer Parabel ist eine Sehne gezogen. Wie groß ist das Rechteck aus den Abschnitten derselben?

15. Von den Endpunkten einer Brennpunktsehne der Parabel $\varrho = \frac{p}{2(1 - \cos\vartheta)}$ sind Lote auf die Achse derselben gefällt. Wie groß ist das Rechteck aus den beiden Loten?

Die Parabel und die Gerade.

16. Welches sind die Koordinaten der Punkte, in denen die Parabel $y^2 = px$ von der Geraden $y = Mx + n$ geschnitten wird?

Beispiele. a) $y^2 = 9x$, $7y - 3x - 30 = 0$;
b) $y^2 = 3x$, $4y - x - 12 = 0$;
c) $y^2 = 11x$, $\frac{y}{12} + \frac{x}{5} + 1 = 0$.

17. Welches ist die geometrische Bedeutung der Relation $\frac{p}{4} \gtreqless Mn$?

18. In welchen Punkten wird die Parabel $y^2 = px$ von der Geraden $y = n$ geschnitten?

19. Welcher Bedingung müssen die Koordinaten einer geraden Linie (u, v) genügen, wenn dieselbe eine Parabel berühren soll, deren Achse mit der Abscissenachse zusammenfällt und deren Brennpunkt der Gleichung $\frac{p}{4}u + 1 = 0$ entspricht? Welches ist demnach die Gleichung dieser Parabel in Linienkoordinaten?

20. Von einem Punkte P sind nach einer Geraden g Strahlen gezogen und auf jedem derselben im Endpunkte ein Lot errichtet. Welche Kurve umhüllt diese Lote? (Linienkoordinaten.)

21. In die Parabel $y^2 = 11x$ ist ein gleichseitiges Dreieck eingezeichnet, dessen eine Spitze im Scheitel derselben liegt. Wie lang ist jede der Seiten? Wie groß ist die Höhe?

22. Durch zwei Punkte der Parabel $y^2 = 8x$, nämlich $x_1 = 2$, $y_1 > 0$ und $x_2 = 18$, $y_2 < 0$, ist eine Gerade gelegt. Welches ist die Gleichung dieser Sekante?

23. Durch den Punkt (x_1, y_1) ist eine Sehne in die Parabel $y^2 = px$ zu legen, welche in diesem Punkte halbiert wird. Welches ist die Gleichung derselben?

Beispiel. $y^2 = 7x$, $x_1 = 5$, $y_1 = 3$.

24. In welchen Punkten wird die Parabel

$$y^2 - 10y - 6x + 15 = 0$$

von der Geraden $3y + 4x - 12 = 0$ geschnitten? Wie weit ist der Brennpunkt der Parabel von der Geraden entfernt?

25. Welches ist die Gleichung einer Parabel, die von der Y-Achse berührt wird und die X-Achse in dem Punkte $(12, 0)$ schneidet, vorausgesetzt daß die Achse derselben der X-Achse parallel läuft und der Parameter gleich 3 ist?

26. Welches sind die Gleichungen der Tangenten, die sich vom Koordinatenanfangspunkte an die Parabel $(y - \beta)^2 = p(x - \alpha)$ ziehen lassen?

Beispiel. $y^2 - 12y - 3x + 84 = 0$.

Tangente und Normale der Parabel.

27. An die Parabel $y^2 = px$ ist im Punkte (x_1, y_1) eine Tangente gelegt. Welches ist die Gleichung derselben?

Beispiele. a) $y^2 = 5x$, $x_1 = 20$, $y_1 = 10$;
b) $y^2 = \frac{7}{2}x$, $x_1 = 1\frac{1}{7}$, $y_1 < 0$.

28. Im Punkte (x_1, y_1) der Parabel $y^2 = px$ sei die Normale konstruiert. Welches ist die Gleichung derselben?

Beispiel. $y^2 = 9x, \quad x_1 = 25, \quad y_1 = -15.$

29a. Gegeben ist die Parabel

$$y^2 - 6y - 8x - 63 = 0.$$

Es sollen die Gleichungen derjenigen Tangenten gefunden werden, deren Berührungspunkte die Abscisse $x_1 = -1$ haben. Unter welchen Winkeln sind diese Tangenten gegen die X-Achse geneigt? Welches sind die Gleichungen der zugehörigen Normalen?

29b. Es soll die Gleichung einer Parabel bestimmt werden, die von der Geraden $Lx + My + N = 0$ berührt wird. Die Achse der Kurve möge mit der X-Achse zusammenfallen, und der Scheitel besitze die Koordinaten a, 0.

Beispiel. $9x - 4y + 7 = 0, \quad a = 6.$

30. Gegeben ist die Parabel $y^2 = px$ und ein Punkt (x_1, y_1) derselben. Wie lang ist die Tangente, die in diesem Punkte die Parabel berührt? Wie lang ist die Normale? Wie lang die Subtangente? Wie lang die Subnormale?

Beispiel. $y^2 = 10x, \quad x_1 = 7, \quad y_1 > 0.$

31. Gegeben ist eine Parabel und auf derselben der Punkt P. Tangente und Normale an diesem Punkte der Kurve sind durch Konstruktion zu finden.

32. In welchem Verhältnis teilt der Brennpunkt einer Parabel den Abstand der beiden Punkte, in welchen die Achse von einer Tangente und der zugehörigen Normale geschnitten wird?

33. Für welchen Punkt der Parabel $y^2 = px$ ist die Tangente gegen die Achse unter dem Winkel φ geneigt?

Beispiele. a) $y^2 = 15x, \quad \angle\varphi = 45^0;$
b) $y^2 = 11x, \quad \angle\varphi = 120^0.$

34. Von welchem Punkte der Achse einer Parabel $y^2 = px$ lässt sich an dieselbe eine Tangente legen, deren Neigungswinkel gegen die X-Achse 30^0 beträgt? Welches ist die Gleichung derselben?

35. Gegeben ist die Parabel $y^2 = px$. a) Für welchen Punkt derselben ist die Tangente gleich dem Parameter? b) Für welchen Punkt ist die Tangente 4 mal so groß als die Abscisse des Berührungspunktes?

36. Für welchen Punkt der Parabel $y^2 = px$ ist die Normale doppelt so lang als die Subtangente? Welchen Winkel schließt in diesem Falle die Normale mit der X-Achse ein?

37. An die Parabel $y^2 = px$ ist eine Tangente zu legen, so daß das Rechteck aus dieser und der zugehörigen Normale gleich dem doppelten Quadrate der Ordinate ist. Welches sind die Koordinaten des Berührungspunktes? Unter welchem Winkel schneidet die Tangente die X-Achse?

38. Es sollen die Koordinaten eines Punktes der Parabel gesucht werden, für welchen die Normale gleich der Differenz zwischen der Subtangente und der Subnormale ist.

39. Es ist zu zeigen, daß die Tangente mit dem nach dem Berührungspunkte gezogenen Brennstrahle und mit der Achse gleiche Winkel einschließt.

40. Von dem Brennpunkte einer Parabel sind Lote auf die Tangenten gefällt. a) Auf welcher Linie liegen die Fußpunkte der Lote? b) Wenn jedes Lot über den Fußpunkt hinaus um sich selbst verlängert wird, wo liegen die Endpunkte der Verlängerungen (Gegenpunkte des Brennpunktes bezüglich der Tangenten)?

41. Von dem Punkte P einer Tangente der Parabel $y^2 = px$ ist eine Gerade nach dem Brennpunkte gezogen und eine zweite nach dem Fußpunkte des vom Berührungspunkte auf die Direktrix gefällten Lotes. In welcher Beziehung stehen diese beiden Linien?

42. Es soll der geometrische Ort des Schnittpunktes einer Tangente der Parabel mit dem Lote bestimmt werden, welches im Brennpunkte auf dem nach dem Berührungspunkte gezogenen Brennstrahle errichtet ist.

43. Gegeben ist die Parabel $y^2 = px$ und die Gerade $y = Mx + n$. Es soll eine Tangente an die Parabel gelegt werden, welche der gegebenen Geraden parallel läuft. Welches ist die Gleichung derselben? Welches sind die Koordinaten des Berührungspunktes?

Beispiel. $y^2 = 5x$, $3x - 2y + 7 = 0$.

44. Welche Tangente der Parabel $y^2 = px$ ist gegen die Gerade $y = Mx + n$ unter dem Winkel φ geneigt? Welches sind die Koordinaten des Berührungspunktes?

Beispiel. $y^2 = 12x$, $y = 3x - 4$, $\angle \varphi = 45^0$.

45. Von einem gegebenen Punkte P ist an eine Parabel eine Tangente zu legen. Für welche Lage des Punktes P läßt sich keine reelle Tangente konstruieren?

46. Es ist nachzuweisen, in welchem Verhältnis der Abstand des Brennpunktes der Parabel von einer Tangente zu der zugehörigen Normale steht.

47. Auf der Parabel $y^2 = px$ gleiten zwei Tangenten fort, welche sich rechtwinklig durchschneiden. Welches ist der geometrische Ort des Durchschnittspunktes derselben?

48. An die Parabel $y^2 = px$ sind zwei Tangenten gelegt, welche auf einander lotrecht stehen. Wie groß ist das Rechteck aus den zugehörigen Subtangenten?

49. In den Endpunkten einer beliebigen Brennpunktsehne sind Tangenten an die Parabel gelegt. Unter welchem Winkel schneiden sich dieselben?

50. Von dem Brennpunkte der Parabel $y^2 = px$ sind Strahlen nach allen Tangenten derselben unter dem konstanten Winkel φ gezogen. Welches ist der geometrische Ort der Schnittpunkte?

51. In den Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) sind zwei Tangenten an die Parabel $y^2 = px$ gelegt. Welches ist die Gleichung der Geraden, die den Schnittpunkt der Tangenten mit dem Brennpunkte verbindet? Es ist zu zeigen, daß diese Gerade den Winkel, welchen die nach den Berührungspunkten gezogenen Brennstrahlen bilden, halbiert.

52. An die Parabel $y^2 = 3\frac{1}{2}x$ sind zwei Tangenten gelegt, deren Berührungspunkte $x_1 = \frac{8}{7}$, $y_1 > 0$, $x_2 = 14$, $y_2 < 0$ sind. Welches sind die Koordinaten des Schnittpunktes derselben? Welchen Winkel schließen beide mit einander ein?

53. An die Parabel $y^2 = px$ sind Tangenten gelegt, deren Berührungspunkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) sind. Es ist das Verhältnis zu bestimmen zwischen dem Winkel, den die Tangenten einschliessen, und dem Winkel, welchen die nach den Berührungspunkten gezogenen Brennstrahlen bilden.

54. Gegeben ist die Parabel $y^2 = px$. In den Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) sind Tangenten an dieselbe gelegt. Es ist zu zeigen, daß die Quadrate der Tangenten, gerechnet von ihrem Schnittpunkte bis zu den Berührungspunkten, sich verhalten wie die nach den Berührungspunkten gezogenen Brennstrahlen.

55. An eine Parabel sind in den Punkten B und C Tangenten gelegt, welche sich im Punkte A durchschneiden. Eine dritte Tangente berührt die Parabel im Punkte L und schneidet die beiden ersten Tangenten in G und H. Es ist nachzuweisen, daß die Strecke GH vom Brennpunkte aus gesehen unter einem konstanten Winkel erscheint. In welcher Beziehung steht dieser Winkel zu dem, den die beiden Brennstrahlen BF und CF einschließen?

56. An eine Parabel sind in den Punkten B, C und L Tangenten gelegt. Wie läßt sich nachweisen, daß der dem Tangentendreieck umschriebene Kreis durch den Brennpunkt der Parabel geht?

57. Um eine Parabel ist ein gleichschenkliges Dreieck beschrieben. Welche Lage haben die Spitze desselben, der Berührungspunkt der Grundlinie und der Brennpunkt der Parabel zu einander?

58. Zwei Tangenten der Parabel $y^2 = px$ bilden mit der Scheiteltangente derselben ein gleichseitiges Dreieck, in dem jede Seite gleich s ist. Welches sind die Koordinaten der Berührungspunkte?

59. Um eine Parabel ist ein gleichseitiges Dreieck beschrieben. Welche Lage haben die Geraden zu einander, welche die Ecken des Dreiecks mit den gegenüberliegenden Berührungspunkten verbinden?

60. Gegeben ist die Parabel $y^2 = px$. Unter welchen Winkeln wird dieselbe a) von dem Kreise $x^2 + y^2 = \frac{p^2}{16}$, b) von dem Kreise $\left(x - \frac{p}{4}\right)^2 + y^2 = p^2$ geschnitten?

61. Es soll die Gleichung einer Parabel gefunden werden, welche den Kreis $y^2 + (x - a)^2 = r^2$ einschließend berührt. Die Achse derselben möge mit der X-Achse zusammenfallen und der Scheitel im Koordinatenanfangspunkte liegen.

Beispiel. $y^2 + (x - 13)^2 = 25$.

62. Gegeben ist die Parabel $y^2 = px$ und der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$. Welches sind die Gleichungen der gemeinschaftlichen Tangenten beider Kurven?

Beispiel. $y^2 = 3x, \quad x^2 + y^2 = 25$.

63. Zwei Parabeln mit gemeinschaftlicher Achse entsprechen den Gleichungen $y^2 = p_1 x$ und $y^2 = p_2 (x - a)$. Welches sind die Gleichungen der gemeinschaftlichen Tangenten beider Kurven?

Beispiele. a) $y^2 = 7x$, $y^2 = 11(x-9)$;
b) $y^2 = 15x$, $y^2 = 9(x-7)$.

64. Von dem Punkte (x_1, y_1) sind an die Parabel $y^2 = px$ zwei Tangenten zu legen. Welches sind die Gleichungen derselben? Welches sind die Koordinaten der Berührungspunkte?

Beispiele. a) $y^2 = 5x$, $x_1 = 3$, $y_1 = 7$;
b) $y^2 = 11x$, $x_1 = 5$, $y_1 = 3$.

65. Von dem Punkte (x_1, y_1) sind zwei Tangenten an die Parabel $y^2 = px$ gelegt. a) Wie groß ist das Rechteck aus den Abscissen der Berührungspunkte? b) Wie groß ist die Summe der Ordinaten der Berührungspunkte?

66. Gegeben ist die Parabel $y^2 = px$ und der Punkt (x_1, y_1). Welchen Winkel schließen die beiden Tangenten ein, die sich von dem gegebenen Punkte an die Parabel ziehen lassen? Wie läßt sich aus der gefundenen Relation die Gleichung für den in Aufgabe **47** gesuchten geometrischen Ort entwickeln?

Beispiel. $y^2 = 5x$, $x_1 = -3$, $y_1 = 7$.

Pol und Polare.

67. Von dem Punkte (x_1, y_1) sind zwei Tangenten an die Parabel $y^2 = px$ gezogen. Welches ist die Gleichung der Polare des Punktes (x_1, y_1) bezüglich der Parabel?

Beispiele. a) $y^2 = 6x$, $x_1 = -2$, $y_1 = 5$;
b) $y^2 = 18x$, $x_1 = 2$, $y_1 = -6$;
c) $y^2 = \frac{10}{3}x$, $x_1 = 11$, $y_1 = 4$.

68. Welches ist die Gleichung der Polare des Brennpunktes bezüglich der Parabel $y^2 = px$?

69. Gegeben ist die Parabel $y^2 = 11x$. In welchen Punkten wird dieselbe von der Polare des Punktes $x_1 = -5$, $y_1 = -1$ geschnitten?

70. Gegeben ist eine Parabel $y^2 = px$ und der Pol $P(x_1, y_1)$. Durch den Pol ist eine Parallele zur Achse bis zum Schnitt mit der Polare gezogen. In welchem Verhältnis wird diese Strecke durch die Parabel geteilt?

71. Gegeben ist die Parabel $y^2 = px$ und der Punkt $P(x_1, y_1)$. Es soll die Polare des Punktes bezüglich der Parabel durch Konstruktion gefunden werden.

72. Die Gerade $Lx + My + N = 0$ werde als Polare bezüglich der Parabel $y^2 = px$ betrachtet. Welches sind die Koordinaten des zugehörigen Poles? Wo liegt der Pol, wenn $L = 0$ ist?

Beispiele. a) $y^2 = 14x$, $4y - 3x + 28 = 0$;

b) $y^2 = \frac{7}{4}x$, $\frac{y}{13} - \frac{x}{2} = 1$.

73. Der Pol P liegt auf der Direktrix der Parabel. Von demselben ist ein Lot auf die zugehörige Polare gefällt. In welchem Punkte schneidet das Lot die Polare? Welche metrische Beziehung besteht in diesem Falle zwischen dem Lote und den Abschnitten der Polare?

74a. Die Gerade g gehe durch den Brennpunkt der Parabel $y^2 = px$. Der zugehörige Pol ist durch Konstruktion zu finden.

74b. Auf einer Parabel ist der Punkt A gegeben. Wie läßt sich nach dem vorhergehenden in diesem Punkte eine Tangente an die Parabel legen?

75. Gegeben ist die Parabel $y^2 = px$ und der Pol $P(x_1, y_1)$. a) Unter welchem Winkel schneiden sich die Strahlen, welche von dem Brennpunkte F nach dem Pole und nach dem Schnittpunkte der Polare und der Direktrix gezogen werden können? b) Die von P ausgehende Parallele zur Achse schneide die Direktrix in L. Unter welchem Winkel wird die Polare des Punktes P von der Geraden LF geschnitten?

76. Gegeben ist die Parabel $y^2 = px$ und die beiden Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2). In welcher Beziehung steht der Abschnitt, den die Polaren dieser Punkte auf der X-Achse bilden, zu dem Abstande der Fußpunkte der Lote, die sich von den Polen auf die X-Achse fällen lassen?

77. Gegeben ist die Parabel $y^2 = 7x$ und die beiden Geraden $y = 5x - 1$ und $y = 3x + 2$. Die letzteren mögen als Polaren bezüglich der Parabel betrachtet werden. Welches ist die Gleichung der Verbindungslinie der beiden zugehörigen Pole? Wie groß ist der Inhalt des von den Geraden eingeschlossenen Dreiecks?

78. Der Gleichung $y^2 - px - k^2 = 0$ entspricht ein Parabelbüschel, wenn man dem Parameter p alle möglichen reellen Werte erteilt. Welche Lage haben die Polaren eines Punktes (x_1, y_1) bezüglich der Parabeln dieses Büschels?

Durchmesser der Parabel.

79. Welche Gestalt nimmt die Gleichung der Polare des Punktes P (x_1, y_1) bezüglich der Parabel $y^2 = px$ an, wenn der Punkt P in die Unendlichkeit rückt?

80. In welchem Verhältnis wird jede nach dem unendlich fernen Punkte P gerichtete Sehne der Parabel durch die zugehörige Polare (Durchmesser) geteilt?

81. Gegeben ist eine Schar paralleler Sehnen, welche der Gleichung $y = Mx + n$ entspricht (n ist eine veränderliche Konstante). Es ist die Gleichung des Durchmessers zu bestimmen, welcher der Sehnenschar konjugiert ist.

Beispiel. $y^2 = \frac{25}{7}x, \quad 4x - 7y + n = 0.$

82. Gegeben ist der Durchmesser einer Parabel $y = k$. Welcher Gleichung entspricht die demselben konjugierte Sehnenschar?

Beispiel. $y^2 = 13x, \quad y = -11.$

83. In der Fläche der Parabel $y^2 = 6x$ befindet sich der Punkt $x_1 = 4$, $y_1 = 3$. Welche Sehne der Parabel wird in diesem Punkte halbiert?

84. Gegeben ist die Parabel $y^2 = px$ und der Durchmesser $y = q$. Es soll durch den Scheitelpunkt eine Sehne gezogen werden, welche durch den gegebenen Durchmesser halbiert wird. Wie läßt sich die Sehne durch Konstruktion ermitteln?

Beispiel. $y^2 = 16x, \quad y = -9.$

85. Die Gleichung einer Parabel ist $y^2 = 9x$, die eines Durchmessers derselben $y = -7$. Welche Lage haben die Polaren aller Punkte des Durchmessers bezüglich der Parabel?

86. Die Parabel $y^2 = px$ wird durch eine Schar paralleler Sehnen, welche der Gleichung $y = Mx + q$ entspricht, geschnitten. Welches ist der Ort der Pole, wenn die Sehnen als Polaren betrachtet werden?

87. Von dem Punkte P (x_1, y_1) ist ein Durchmesser durch die Parabel $y^2 = px$ gezogen und in dem Schnittpunkte des Durchmessers und der Parabel eine Tangente an die letztere gelegt. Unter welchem Winkel ist die Tangente gegen die Polare des Punktes P geneigt?

88. Von dem Punkte P sind an eine Parabel zwei Tangenten und der Durchmesser gezogen, ferner in dem Punkte, in dem der

Durchmesser die Parabel schneidet, eine Tangente an die letztere gelegt und bis zum Durchschnitt mit den beiden ersten Tangenten verlängert. Es ist zu zeigen, daß die dritte Tangente in ihrem Berührungspunkte halbiert wird und jede der durch P gehenden Tangenten halbiert.

89. An die Parabel $y^2 = px$ sind drei Tangenten gelegt und die Berührungspunkte durch gerade Linien verbunden. Wie verhält sich der Inhalt des umschriebenen Dreiecks zu dem des eingeschriebenen?

90. Durch den Punkt (x_1, y_1) der Parabel $y^2 = px$ ist ein Durchmesser und eine Tangente gelegt. Welche Gestalt nimmt die Gleichung der Parabel an, wenn man den Durchmesser als Abscissenachse, die Tangente als Ordinatenachse betrachtet?

91. In welcher Beziehung steht der Parameter irgend eines Durchmessers zu der Entfernung des Endpunktes desselben vom Brennpunkte der Parabel?

92. In einer Parabel sind zwei parallele Sehnen gezogen. In welcher Beziehung stehen die Quadrate dieser Sehnen?

93. Gegeben ist eine Parabel. Das Achsensystem wird von einem Durchmesser und der Tangente im Endpunkte desselben gebildet, welche mit diesem den Winkel φ einschließt. Welches sind die Koordinaten des Poles, wenn die Gerade $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ als Polare bezüglich der Parabel betrachtet wird?

94. Auf zwei Durchmessern einer Parabel sind von ihren Endpunkten aus gleiche Stücke abgeschnitten und die Teilpunkte mit einander verbunden. In welcher Beziehung stehen die Abschnitte der so entstandenen Sehne zu einander?

Die Parabel als geometrischer Ort.

95. Auf welcher Linie liegen die Halbierungspunkte sämtlicher Ordinaten einer Parabel, deren Gleichung $y^2 = px$ ist?

96. Gegeben ist die Parabel $y^2 = px$. a) Auf welcher Linie liegen die Halbierungspunkte aller Leitstrahlen derselben? b) Jeder Leitstrahl ist um sich selbst verlängert. Auf welcher Linie liegen die Endpunkte?

97. Von dem Fußpunkte der Direktrix sind Sekanten in die Parabel $y^2 = px$ gezogen und die so entstandenen Sehnen halbiert. Auf welcher Kurve liegen die Halbierungspunkte der Sehnen?

98. Von dem Brennpunkte der Parabel $y^2 = px$ sind Lote auf die Normalen dieser Kurve gefällt. Es ist der geometrische Ort der Fußpunkte der Lote zu bestimmen.

99. Es ist der geometrische Ort des Schnittpunktes derjenigen Normalen der Parabel $y^2 = px$ zu bestimmen, welche lotrecht zu einander stehen.

100. An die Parabel $y^2 = px$ sind zwei Tangenten gelegt. Die Kotangenten der Neigungswinkel dieser Tangenten zur Hauptachse haben eine Differenz $= d$. Welches ist der geometrische Ort des Schnittpunktes der Tangenten?

101. Gegeben ist die Gerade g und der Punkt P außerhalb derselben. Von dem Punkte P ist ein Strahl nach g gezogen und über diesem als Grundlinie ein gleichschenkliges Dreieck konstruiert, so daß der eine Schenkel desselben auf der Geraden g lotrecht steht. Welches ist der geometrische Ort der Spitze desselben?

102. Gegeben ist die Gerade g und der Punkt P außerhalb derselben. Durch den Punkt P ist eine Schar von Kreisen gelegt, die alle von der Geraden g berührt werden. Auf welcher Linie liegen die Endpunkte aller Durchmesser, die von P aus gezogen werden können?

103. Die konstante Grundlinie a eines Dreiecks liegt fest; zwischen den beiden anliegenden Winkeln β und γ besteht die Relation $\sin\beta = tg\,\gamma$. Welches ist der geometrische Ort der Spitze des Dreiecks?

104. Von einem Dreieck liegt ein Eckpunkt fest, die demselben gegenüberliegende Seite aber, welche die konstante Länge c hat, wird längs einer gegebenen Geraden g fortgeschoben. Auf welcher Linie bewegt sich dann der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises fort?

105. Von einem Dreieck ist die Grundlinie c und der Inhalt J gegeben. Die Seite c möge mit der X-Achse, der eine Endpunkt mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammenfallen. Welches ist der geometrische Ort des Höhenpunktes?

106. Die Grundlinie c eines Dreiecks hat dieselbe Lage wie in der vorhergehenden Aufgabe. Die gegenüberliegende Spitze gleitet

auf der Parabel $y^2 = px$ fort. Welches ist der geometrische Ort des Schwerpunktes?

107. Die Grundlinie c eines Dreiecks hat dieselbe Lage wie in Aufgabe 105. Die gegenüberliegende Spitze gleitet längs der Parabel $y + nx^2 - mx = 0$, deren Direktrix der X-Achse parallel läuft, fort. Welche Linie beschreibt der Schwerpunkt des Dreiecks?

108. Gegeben ist die Gerade g und der Punkt P. Es soll der geometrische Ort eines Punktes Q bestimmt werden, so daß das Quadrat seiner Entfernung von P, vermindert um das Quadrat seines Abstandes von g, gleich d^2 ist.

109. In dem Teile des Kreises $y^2 = 2rx - x^2$, der zwischen den beiden Geraden $x = 0$ und $x = r$ liegt, sind Kreise konstruiert, welche die Peripherie und den Durchmesser berühren. Welches ist die Gleichung der Linie, auf welcher die Mittelpunkte dieser Kreise liegen?

110. Auf welcher Linie liegen die Mittelpunkte aller derjenigen Kreise, welche die Gerade $x = 0$ und den Kreis $y^2 + (x - a)^2 = r^2$ berühren?

111. Gegeben ist die Gerade g $(x = 0)$ und der Kreis K $[(x - a)^2 + y^2 = r^2]$. Es soll der geometrische Ort desjenigen Punktes bestimmt werden, dessen Entfernung von g gleich der Tangente ist, die sich von ihm an den Kreis K ziehen läßt.

112. In dem Rechteck $ABCD$ ist eine Parallele zu der Diagonale AC gezogen, welche die Seite AB in E, die Seite BC in F schneidet. Man verbindet A mit F und zieht durch E eine Parallele zu BC, dann schneiden sich diese Linien im Punkte P. Welche Linie beschreibt der Punkt P, wenn die Gerade EF so verschoben wird, daß sie der Diagonale AC parallel bleibt?

113. Die Tangenten der Parabel $y^2 = px$ mögen als Polaren bezüglich des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ betrachtet werden. Auf welcher Kurve liegen die zugehörigen Pole?

Konstruktionsaufgaben.

114. Zur Konstruktion einer Parabel ist außer dem Brennpunkte F und der Richtung der Achse a

a) ein Punkt P der Kurve oder

b) die Richtung einer Tangente t

gegeben.

115. Es soll die Richtung der Direktrix einer Parabel bestimmt werden, wenn der Brennpunkt F, die Richtung einer Tangente t und deren Berührungspunkt P gegeben sind.

116. Zur Konstruktion einer Parabel sind zwei Tangenten t_1 und t_2 und der Brennpunkt F gegeben.

117. Gegeben sind zwei Tangenten t_1 und t_2 und der Brennpunkt F einer Parabel. Es soll die Lage eines Punktes der Kurve gefunden werden, dessen Brennstrahl gleich dem arithmetischen Mittel der Brennstrahlen der beiden Punkte ist, in denen die Parabel von t_1 und t_2 berührt wird.

118. Eine Parabel ist zu konstruieren, wenn außer dem Brennpunkte F

a) zwei Punkte der Kurve P_1 und P_2 oder

b) ein Punkt P und die Richtung einer Tangente t

gegeben sind.

119. Zur Konstruktion einer Parabel sind zwei Punkte derselben, P_1 und P_2, und die Direktrix d gegeben.

120. Von einer Parabel kennt man die Lage eines Punktes P, die Richtung der Achse a und die der Direktrix d. Die Parabel ist zu konstruieren.

121. Zur Konstruktion einer Parabel ist die Direktrix d, eine Tangente t und der Berührungspunkt derselben P gegeben. Wie läßt sich die Lage des Brennpunktes bestimmen?

122. Es soll der Brennpunkt einer Parabel gefunden werden, wenn ein Punkt P der Kurve, die Direktrix d und eine Tangente t der Lage nach bekannt sind.

123. Die Direktrix d, die Scheiteltangente s und eine andere Tangente t einer Parabel sind gegeben. Wie findet man den Brennpunkt der Kurve?

124. Von einer Parabel kennt man die Lage eines Punktes P, die Richtung der Achse a und die Lage des Scheitelpunktes S. Brennpunkt und Direktrix sind durch Konstruktion zu finden.

125. Zur Konstruktion einer Parabel sind die Achse a, eine Tangente t und deren Berührungspunkt P gegeben.

126. Wie findet man Brennpunkt und Direktrix einer Parabel, wenn die Achse a, der Scheitel S und eine Tangente t gegeben sind?

127. Von einer Parabel sind die Scheiteltangente t_1, eine andere Tangente t_2 und der Berührungspunkt P der letzteren gegeben. Wie läßt sich die Konstruktion der Parabel ausführen?

128. Zwei Tangenten der Parabel t_1 und t_2 mit ihren Berührungspunkten P_1 und P_2 sind gegeben. Die Lage der Direktrix und des Brennpunktes durch Konstruktion zu bestimmen.

129. Aus der Scheiteltangente t_1 und zwei andern Tangenten t_2 und t_3 einer Parabel die Bestimmungsstücke dieser Kurve durch Konstruktion zu ermitteln.

130. Zur Konstruktion einer Parabel sind drei Tangenten t_1, t_2, t_3 und die Achse a gegeben.

131. Von einer Parabel sind die beiden Punkte P_1 und P_2 und die Achse a gegeben. Wie läßt sich die Konstruktion der Kurve ausführen?

132. Von einer Parabel sind vier Tangenten t_1, t_2, t_3, t_4 gegeben. Die Kurve ist durch Konstruktion zu finden.

133. In ein gleichschenkliges Dreieck soll eine Parabel gelegt werden, so daß die Achse mit der Höhe zur Grundlinie zusammenfällt und die Schenkel die Parabel in den Endpunkten der Grundlinie berühren.

134. Direktrix und Brennpunkt einer Parabel zu finden, welche die eine Seite eines Dreiecks in ihrem Halbierungspunkte, die beiden andern Seiten in ihren Verlängerungen berührt.

135. Von einer gegebenen Parabel sollen Brennpunkt, Direktrix und Achse durch Konstruktion gefunden werden.

136. Von einer Parabel ist ein Bogen gegeben, welcher den Scheitel nicht enthält. Wie findet man Achse und Scheitel der Kurve?

137. Zur Konstruktion einer Parabel ist die Richtung und Lage der Achse a, die Länge des Parameters p und ein Punkt der Kurve P gegeben.

138. Es soll durch Konstruktion der Brennpunkt einer Parabel gefunden werden, wenn die Direktrix d, ein Pol P und die zugehörige Polare p der Lage nach gegeben sind.

139. Zur Konstruktion einer Parabel sind der Brennpunkt derselben F, der Pol P und die zugehörige Polare p gegeben.

140. Von einer Parabel ist die Achse a gegeben, ferner der Pol P und die zugehörige Polare p. Wie läßt sich die Konstruktion der Parabel ausführen?

Flächeninhalt der Parabel.

141. Von der Parabel $y^2 = px$ sind die Abscissen zweier Punkte x_1 und x_2 gegeben. Wie groß ist der Inhalt desjenigen Flächenstückes, welches von den beiden zugehörigen (positiven oder negativen) Ordinaten, der Achse und dem Parabelbogen begrenzt wird?

Beispiel. $y^2 = 6x$, $x_1 = 8\frac{1}{6}$, $x_2 = 13\frac{1}{2}$.

142. Welches ist der Inhalt des durch den Parameter abgeschnittenen Parabelsegmentes, wenn die Gleichung der Parabel $y^2 = px$ ist?

Beispiel. $y^2 = 9x$.

143. Wie groß ist der Parameter einer Parabel, von welcher eine zur Achse senkrechte Gerade von der Länge $2a$ ein Segment $= a^2$ abschneidet?

144. Zwei Punkte der Parabel $y^2 = px$, deren Abscissen x_1 und x_2 und deren Ordinaten positiv sind, werden durch eine Sehne verbunden. Wie groß ist das von der Sehne und dem Bogen begrenzte Stück?

Beispiel. $y^2 = 4x$, $x_1 = 9$, $x_2 = 25$.

145. Durch den Scheitelpunkt der Parabel $y^2 = px$ ist eine Sehne gezogen, welche gegen die Achse unter dem Winkel α geneigt ist. Welchen Inhalt hat das durch dieselbe abgeschnittene Segment?

Beispiel. $y^2 = 10x$, $\angle \alpha = 50^0$.

146. Um ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite s ist eine Parabel beschrieben, so daß der Scheitel derselben mit dem einen Eckpunkte, die Achse mit der Höhe zusammenfällt. Wie groß ist die Summe der Inhalte der beiden Segmente?

147. Durch den Brennpunkt der Parabel $y^2 = px$ ist eine Sehne gelegt, welche mit der X-Achse den Winkel α einschließt. Welchen Inhalt hat das Parabelsegment, das durch diese Sehne abgeschnitten wird?

Beispiel. $y^2 = 7x$, $\angle \alpha = 45^0$.

148. Die im Brennpunkte der Parabel $y^2 = px$ stehende positive Ordinate ist um den Parameter verlängert und durch den Endpunkt der Verlängerung ist eine Parallele zur Achse gezogen. In welchem Verhältnis stehen die Inhalte der beiden entstandenen dreieckigen Figuren?

149. In der Parabel $y^2 = px$ ist eine Sehne gezogen, deren Endpunkte die Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 besitzen. In welchem Verhältnis steht das Segment zu dem Parallelogramm, welches die Sehne und die derselben parallele Tangente der Parabel zu Seiten hat?

150. Von dem Punkte (x_1, y_1) sind an die Parabel $y^2 = px$ zwei Tangenten gezogen. Welchen Inhalt hat das Flächenstück, welches von den beiden Tangenten und dem dazwischen liegenden Parabelbogen begrenzt wird?

151. Gegeben ist die Parabel $y^2 = 3x$. In derselben ist eine Sehne gezogen, welche die Länge 10 besitzt und unter einem Winkel von 50^0 gegen die Achse geneigt ist. Welches ist der Inhalt des von derselben abgeschnittenen Parabelsegmentes?

152. Die Parabel $y^2 = 9x$ wird von den beiden Parallelen $y - x + 10 = 0$ und $y - x + 18 = 0$ geschnitten. Welchen Inhalt hat das von den beiden Geraden und den dazwischen liegenden Bogen der Parabel begrenzte Stück?

153. Gegeben ist die Parabel $y^2 = px$ und der Kreis $y^2 = 4px - x^2$. Welche Inhalte haben die Teile, in welche der Kreis durch die Parabel zerlegt wird?

154. Gegeben ist die Parabel $y^2 = px$. Über dem Parameter derselben als Durchmesser ist ein Kreis konstruiert. In welchem Verhältnis stehen die Teile des Kreises, in welche derselbe durch die Parabel zerlegt wird?

155. Zwei Parabeln sind gegeben, welche den Gleichungen $y^2 = px$ und $x^2 = py$ entsprechen. Es soll der Inhalt desjenigen Flächenstückes bestimmt werden, welches von den Bogen begrenzt wird, die zwischen den Schnittpunkten liegen.

156. Die beiden Parabeln $y^2 = px$ und $y^2 = 2p\left(x - \frac{p}{4}\right)$ schneiden sich in zwei Punkten. Welchen Inhalt hat das Flächenstück, welches von den Bogen begrenzt wird, die zwischen den Schnittpunkten liegen?

157. Die Polargleichung einer Parabel ist $r = \frac{\frac{1}{2}p}{1 - \cos\varphi}$. Gegeben sind zwei Radienvektoren r_1 und r_2, sowie die zugehörigen Anomalien φ_1 und φ_2. Welches ist der Inhalt des von r_1 und r_2 herausgeschnittenen Parabelsektors?

Beispiel. $p = 10$, $\angle \varphi_1 = 60^0$, $\angle \varphi_2 = 30^0$.

158. Ein Komet beschreibt bei seiner Bewegung um die Sonne eine Parabel. Nach Verlauf von 30 Tagen hat derselbe eine Winkelentfernung von $6^0\ 30'$ vom Perihel erreicht und befindet sich in der Entfernung von 1,5 Erdweiten von der Sonne. Wie lange Zeit wird verstreichen, bis die Entfernung des Kometen von der Sonne 3 Erdweiten beträgt, und welches ist dann die Winkelentfernung desselben vom Perihel?

Die Ellipse.

Die Gleichung der Ellipse.

159. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P, für den die Summe der Entfernungen von den beiden Punkten $(e, 0)$ und $(-e, 0)$ gleich $2a$ ist?

160. Die Achsen einer Ellipse fallen mit den Koordinatenachsen zusammen. Welches ist die Gleichung der Kurve, wenn die Hauptachse $2a = 10$, die Nebenachse $2b = 6$ ist?

161. Die Hauptachse einer Ellipse ist $2a = 26$, die lineare Excentricität $e = 12$. Welches ist die Gleichung der Kurve, wenn die Achsen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen?

162. Die Summe der Halbachsen einer Ellipse ist $a + b = 27$, die lineare Excentricität $e = 9$. Welches ist die Gleichung der Ellipse?

163. Die Achsen einer Ellipse fallen mit den Koordinatenachsen zusammen, die Koordinaten zweier Punkte der Kurve sind $x_1, y_1; x_2, y_2$. Welches ist die Gleichung der Ellipse?

Beispiel. $x_1 = 1, \quad y_1 = 4; \quad x_2 = -6, \quad y_2 = 1.$

164. Die Koordinaten des Mittelpunktes einer Ellipse sind $x_1 = 4$, $y_1 = 7$, die Achsen derselben $2a = 14$, $2b = 8$. Welches ist die Gleichung derselben, wenn die Achsen den Koordinatenachsen parallel laufen?

165. Gegeben ist die Gleichung einer Ellipse

$$16y^2 - 32y + 9x^2 + 36x = 92.$$

Welches sind die Koordinaten des Mittelpunktes? Wie groß sind die Achsen? Welches sind die Koordinaten der Brennpunkte?

166. Wie verhalten sich die Quadrate der Ordinaten zweier Punkte der Ellipse $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$?

167. Die Gleichung einer Ellipse ist $7 y^2 + 3 x^2 = 18$. Wie groß ist der Parameter? Wie groß die numerische Excentricität derselben?

168. Für welchen Punkt der Ellipse $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ sind Abscisse und Ordinate gleich? Wie läßt sich der Punkt durch Konstruktion finden?

169. Gegeben ist die Ellipse $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ und der Punkt (x_1, y_1) derselben. Welches sind die Gleichungen der Brennstrahlen, die sich nach diesem Punkte ziehen laßen? Wie lang ist jeder der Brennstrahlen?

Beispiel. $100 y^2 + 36 x^2 = 3600, \quad x_1 = 8, \quad y_1 = 3{,}6.$

170. Gegeben ist die Gleichung einer Ellipse $18 y^2 + 7 x^2 = 126$. Welchen Winkel schließen die nach dem Punkte $x_1 = 3$, $y_1 > 0$ derselben gezogenen Brennstrahlen mit einander ein?

171. Für welchen Punkt der Ellipse $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ ist das Rechteck aus den Brennstrahlen gleich dem Quadrate über $\frac{3}{2} b$?

172. Welches ist die Gleichung einer Ellipse, in der die Summe der Brennstrahlen eines Punktes derselben dreimal so groß ist als die doppelte lineare Excentricität?

173. Gegeben ist die Gleichung einer Ellipse $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$. Welche Gestalt nimmt dieselbe an, wenn die Gerade $x = -a$ zur Y-Achse gewählt wird, die X-Achse aber unverändert bleibt (Scheitelgleichung)?

174. Wenn ein Punkt der Ellipse $36 y^2 + 25 x^2 = 900$ die Ordinate $+3$ hat, welches ist dann die Abscisse für die Scheitelgleichung derselben?

175. Die Scheitelgleichung einer Ellipse ist $y^2 = 5\frac{5}{9} x - \frac{25}{81} x^2$. Wie groß sind die Achsen derselben?

176. Von einer Ellipse ist die kleinere Achse $2b = 12$ und der Parameter $p = 5$ gegeben. Welches ist die Scheitelgleichung derselben?

177. Für die Scheitelgleichung einer Ellipse sind die Koordinaten zweier Punkte x_1, y_1 und x_2, y_2 gegeben. Wie groß sind die Achsen derselben?

Beispiel. $x_1 = 2, \quad y_1 = 1; \quad x_2 = 6, \quad y_2 = -1.$

178. Welches ist die Polargleichung einer Ellipse, deren Achsen $2a$ und $2b$ sind, wenn der Mittelpunkt als Pol, die Hauptachse als Achse angenommen wird? Wie groß ist die Summe der reciproken Quadrate zweier Radienvektoren, die auf einander lotrecht stehen?

179. Welches ist die Polargleichung einer Ellipse mit den Achsen $2a$ und $2b$, wenn die Hauptachse als Achse und einer der Brennpunkte als Pol angenommen wird?

180. Durch einen Brennpunkt einer Ellipse ist eine Sehne gezogen. Wie groß ist das Rechteck, welches sich aus den Abschnitten derselben bilden läßt?

181. Durch einen Brennpunkt einer Ellipse sind zwei Sehnen gezogen. Wie verhalten sich die Rechtecke, von denen jedes aus den Abschnitten einer Sehne gebildet wird?

182. Wie groß ist das harmonische Mittel zwischen den Abschnitten einer Brennpunktsehne der Ellipse?

183. Durch einen Brennpunkt einer Ellipse sind zwei Sehnen gezogen, welche lotrecht zu einander stehen. Wie groß ist die Summe der reciproken Werte derselben?

184. Die große Achse einer Ellipse ist $2a = 20$, die lineare Excentricität $e = 6$. Für welche Anomalie ist der Radiusvektor gleich dem Parameter der Ellipse?

185. Gegeben ist die doppelte Excentricität der Erdbahn $2e = 69\,600$ Meilen und die große Achse derselben $2a = 41280000$ Meilen. Um wieviel ist die Entfernung der Erde von der Sonne gewachsen, wenn sich dieselbe um den Winkel $\alpha = 120^0$ vom Perihel fortbewegt hat?

186. Es soll die numerische Excentricität der Erdbahn gefunden werden, wenn die Entfernung der Erde von der Sonne bei der Anomalie $\varphi = 110^0$ 20659200 Meilen beträgt, und der halbe Parameter gleich 20639000 Meilen ist.

Die Ellipse und die Gerade.

187. In welchen Punkten wird die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ von der Geraden $y = Mx + n$ geschnitten?

Beispiele. a) $25y^2 + 4x^2 = 100, \quad y = 5x + 7;$

b) $36y^2 + 25x^2 = 900, \quad 9y - 10x + 75 = 0;$

c) $7x^2 + 9y^2 = 1, \quad y = 2x + 11.$

188. Welches ist die geometrische Bedeutung der Relation

$$a^2 M^2 + b^2 - n^2 \gtreqless 0?$$

189. Die Achsen einer Ellipse fallen mit den Koordinatenachsen zusammen. Welches ist die Gleichung der Ellipse in Linienkoordinaten?

190. Um den Punkt $(e, 0)$ ist mit dem Radius $2a$ ein Kreis beschrieben und in demselben ein Büschel von Sehnen gezogen, dessen Mittelpunkt $(-e, 0)$ ist. Errichtet man in den Halbierungspunkten der Abschnitte jeder Sehne Lote, so werden diese von einer Kurve eingehüllt. Welches ist die Gleichung dieser Kurve in Linienkoordinaten? $(a > e.)$

191. Gegeben ist der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$. Innerhalb desselben sind durch die Punkte $(e, 0)$ und $(-e, 0)$ parallele Sehnen gezogen und die Endpunkte derselben, welche auf derselben Seite des Kreisdurchmessers liegen, durch gerade Linien verbunden. Welche Kurve hüllt die letzteren geraden Linien ein?

192. Gegeben ist das Kreisbüschel $x^2 + y^2 - 2kx - f^2 = 0$. Auf der Y-Achse sind die beiden Lote $y = a$ und $y = -a$ errichtet $(a > f)$ und die Punkte, in denen ein Kreis des Büschels von diesen Loten geschnitten wird, kreuzweise verbunden. Welche Kurve umhüllt die letzteren Linien? Was wird aus dem Gebilde für $a = f$?

193. In welchen Punkten schneidet die Ellipse

$$49y^2 - 196y + 25x^2 + 150x - 799 = 0$$

die Koordinatenachsen?

194. Gegeben ist die Ellipse

$$9y^2 - 18y + 4x^2 - 16x - 11 = 0$$

und die Gerade $x - 2y - 2 = 0$. In welchen Punkten wird die Ellipse von der Geraden geschnitten?

195. Durch einen Brennpunkt der Ellipse $169y^2 + 25x^2 = 4225$ ist eine Sehne gelegt, welche zu beiden Achsen gleiche Neigung hat. In welchen Punkten schneidet dieselbe die Ellipse?

196. Durch den links liegenden Brennpunkt der Ellipse $100y^2 + 9x^2 = 900$ ist eine Sehne von der Länge 7 zu ziehen. Welches ist die Gleichung derselben?

197. Von dem Koordinatenanfangspunkte sind an die Ellipse

$$25y^2 - 200y + 4x^2 - 56x + 496 = 0$$

zwei Tangenten zu legen. Welches sind die Gleichungen derselben?

198. Jede der beiden Achsen der Ellipse $49y^2 + 25x^2 = 1225$ sei stetig geteilt, so daß die Teilpunkte auf den positiven Achsenteilen liegen. Welches sind die Koordinaten der Punkte, in denen die Verbindungslinie dieser Teilpunkte die Ellipse schneidet?

199. In die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ist ein Quadrat einbeschrieben. Welches sind die Gleichungen der Seiten? Wie groß ist der Inhalt desselben?

200. In die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ sind zwei gleichseitige Dreiecke beschrieben; a) die eine Spitze des einen Dreiecks befindet sich in dem links liegenden Scheitel auf der Hauptachse, b) die eine Spitze des andern dagegen im rechtsliegenden Brennpunkte. Welches sind die Koordinaten der übrigen Ecken?

201. In die Ellipse $25y^2 + 9x^2 = 225$ ist ein gleichseitiges Sechseck eingezeichnet, so daß zwei Ecken desselben in den Endpunkten der kleineren Achse liegen. Welches sind die Koordinaten der übrigen Ecken?

202. Es soll der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ein Rechteck einbeschrieben werden, dessen Inhalt gleich dem des Quadrates ist, welches dem Kreise $x^2 + y^2 = ab$ einbeschrieben werden kann.

203. Welches sind die Gleichungen der Seiten eines der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ eingeschriebenen Rechtecks, dessen Inhalt ebenso groß ist als der des eingeschriebenen Quadrates?

Tangente und Normale der Ellipse.

204. An die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ist im Punkte (x_1, y_1) eine Tangente gelegt. Welches ist die Gleichung derselben?

Beispiele. a) $20y^2 + 5x^2 = 100, \quad x_1 = 2, \quad y_1 = 2;$

b) $9y^2 + 4x^2 = 36, \quad x_1 = -\frac{3}{2}, \quad y_1 \lesseqgtr 0.$

205. Durch den rechts liegenden Brennpunkt der Ellipse $25y^2 + 16x^2 = 1600$ ist ein Brennstrahl unter einem Winkel von 30^0 zur Achse gezogen. Welches ist die Gleichung der Tangente im Schnittpunkte?

206. Im Punkte (x_1, y_1) der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ sei die Normale konstruiert. Welches ist die Gleichung derselben? Welche Stücke schneidet dieselbe auf den Koordinatenachsen ab?

Beispiel. $15y^2 + 8x^2 = 120, \quad x_1 = 3, \quad y_1 < 0.$

207. Gegeben ist die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. Im Punkte (x_1, y_1) derselben sind Tangente und Normale konstruiert. Wie

lang ist die Tangente? Wie lang die Normale? Wie lang die Subtangente? Wie lang die Subnormale?

Beispiel. $25y^2 + 4x^2 = 100$; $x_1 = 4$, $y_1 = \frac{6}{5}$.

208. An die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ist eine Tangente gelegt. Welche Beziehung besteht zwischen dem Winkel φ_1, den der Radiusvektor vom Mittelpunkte nach dem Berührungspunkte gezogen mit der X-Achse einschließt, und dem Winkel φ_2, unter dem die Tangente gegen die X-Achse geneigt ist?

209. Durch einen Punkt der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ist die Tangente und die Normale gezogen. Wo liegt dieser Punkt, wenn die beiden Linien mit der Abscissenachse ein gleichschenkliges Dreieck einschließen, dessen Grundlinie in der X-Achse liegt?

210. Auf die Tangenten der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ sind von dem Brennpunkte $(e, 0)$ Lote gefällt. Welches ist die Gleichung der Kurve, auf der die Fußpunkte der Lote liegen?

211. Durch den Mittelpunkt einer Ellipse ist ein Strahl gezogen, welcher dem von dem Brennpunkte $(e, 0)$ nach dem Berührungspunkte einer Tangente gezogenen Radiusvektor parallel läuft. Welches ist der geometrische Ort des Punktes, in dem der Strahl die Tangente schneidet?

212. Von einem Brennpunkte einer Ellipse ist ein Lot auf eine Tangente gefällt und über den Fußpunkt hinaus um sich selbst verlängert. Es ist zu zeigen, daß der Endpunkt der Verlängerung (Gegenpunkt des Brennpunktes), der Berührungspunkt und der andere Brennpunkt in einer Geraden liegen.

213. In welcher Beziehung stehen die Winkel, welche die nach dem Berührungspunkte gezogenen Brennstrahlen mit der Tangente einschließen?

214. Gegeben ist die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. Welches ist der geometrische Ort des Gegenpunktes des Brennpunktes $(e, 0)$ bezüglich der Tangenten der Ellipse?

215. An die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ und den Hauptkreis $y^2 + x^2 = a^2$ sind Tangenten gelegt, deren Berührungspunkte dieselbe Abscisse haben. In welcher Beziehung stehen die Subtangenten? In welcher Beziehung die Subnormalen?

216. Auf einer gegebenen Ellipse ist der Punkt P gegeben. Es soll in diesem Punkte eine Tangente an die Ellipse gelegt werden. Wie ist die Konstruktion auszuführen?

217. Wie läßt sich von einem beliebigen Punkte P eine Tangente an eine Ellipse legen?

218. An die Ellipse $5y^2 + 3x^2 = 15$ ist eine Tangente zu legen, welche der Geraden $3y - 4x + 1 = 0$ parallel läuft. Welches ist die Gleichung derselben?

219. An die Ellipse $36y^2 + 25x^2 = 900$ sind Tangenten gelegt, welche die X-Achse unter einem Winkel von 30^0 schneiden. Welches sind die Koordinaten der Berührungspunkte?

220. Von einem Punkte der verlängerten Hauptachse der Ellipse $9y^2 + x^2 = 9$ ist eine Tangente von der Länge $t = 5$ an die Ellipse gelegt. Welches ist die Gleichung derselben?

221. Bekannt sind die große Achse $2a = 18$ und die lineare Excentricität $e = 5$ einer Ellipse. Die Leitstrahlen eines Punktes derselben im ersten Quadranten schließen einen Winkel von 40^0 ein. Unter welchem Winkel ist die Tangente der Ellipse an diesem Punkte gegen die X-Achse geneigt?

222. An die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ sind Tangenten gelegt, so daß die Subtangenten gleich den Abscissen der Berührungspunkte sind. Welches sind die Koordinaten der Berührungspunkte?

223. Im Punkte (x_1, y_1) der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ist die Tangente und die Normale konstruiert und vom Mittelpunkte ein Lot auf die Tangente gefällt. Wie groß ist das Rechteck, welches das Lot und die Normale zu Seiten hat?

224. Von den Brennpunkten einer Ellipse sind Lote auf eine beliebige Tangente derselben gefällt. Wie groß ist das Rechteck aus diesen beiden Loten?

225. Es ist zu zeigen, daß Tangente und Normale einer Ellipse mit den nach dem Berührungspunkte gezogenen Brennstrahlen ein harmonisches Strahlenbüschel bilden.

226. In welchem Verhältnis wird die Abscisse eines Punktes der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ durch die in demselben konstruierte Normale geteilt?

227. In welchem Verhältnis stehen die Abschnitte einer Normale der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, welche von dem Kurvenpunkte bis zu den Schnittpunkten mit den Achsen gerechnet werden?

228. In dem Punkte (x_1, y_1) der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ sind Tangente und Normale konstruiert. Wie groß ist das Rechteck

aus den Achsenabschnitten, welche α) durch die Tangente, β) durch die Normale abgegrenzt werden?

229. An die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ist im Punkte (x_1, y_1) eine Tangente gelegt und bis zum Schnitt mit den beiden Scheiteltangenten verlängert. Über dem Abschnitt derselben als Durchmesser ist ein Kreis konstruiert. Welches ist die Gleichung des Kreises? In welchen Punkten wird die X-Achse von demselben geschnitten?

230. Im Punkte $P(x_1, y_1)$ ist an die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ eine Tangente gelegt, welche die Verlängerung der kleineren Achse in Q schneidet. Es werde ein Kreis beschrieben, der durch P und Q geht und dessen Mittelpunkt in der kleineren Achse liegt. In welchen Punkten schneidet dieser Kreis die Hauptachse der Ellipse?

231. An die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ sind in den Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) Tangenten gelegt. Wie groß ist der Winkel, den beide mit einander einschließen? Welches ist die Gleichung der Geraden, die den Schnittpunkt der Tangenten mit dem Mittelpunkte verbindet?

Beispiel. $9y^2 + 4x^2 = 36$; $x_1 = 1$, $y_1 > 0$; $x_2 = 2$, $y_2 < 0$.

232. An die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ sind zwei Tangenten gelegt, welche sich rechtwinklig durchschneiden. In welcher Beziehung stehen die Rechtecke, von denen das eine aus den Abscissen, das andere aus den Ordinaten der Berührungspunkte gebildet ist?

233. An der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ gleiten zwei Tangenten fort, die rechtwinklig zu einander geneigt sind. Welches ist der geometrische Ort des Scheitels des rechten Winkels?

234. Gegeben ist die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ und der Kreis $y^2 + x^2 = ab$. α) Welches sind die Gleichungen der gemeinschaftlichen Tangenten beider Kurven? β) Unter welchem Winkel schneiden sich Kreis und Ellipse?

235. Es ist eine Parabel konstruiert, welche mit der Ellipse $4y^2 + x^2 = 4a^2$ den rechts liegenden Brennpunkt gemein hat und deren Scheitel im Koordinatenanfangspunkte liegt. α) Welches sind die Gleichungen der gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kurven? β) Unter welchem Winkel wird die Ellipse von der Parabel geschnitten?

236. An die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ sind von dem Punkte (x_1, y_1) zwei Tangenten zu legen. Welches sind die Gleichungen derselben? Welche Winkel schließen die Tangenten ein?

Beispiel. $4y^2 + x^2 = 25$; $x_1 = 8$, $y_1 = 3$.

237. Gegeben ist die Ellipse $16y^2 + 9x^2 = 144$. Von einem Punkte im positiven Quadranten, dessen Ordinatenquadrat dreimal so groß ist als das Quadrat der zugehörigen Abscisse, sind zwei Tangenten an die Ellipse zu legen, welche sich rechtwinklig durchschneiden. Welches sind die Gleichungen der Tangenten?

Pol und Polare.

238. Gegeben ist die Gleichung einer Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. Welches ist die Gleichung der Polare des Punktes (x_1, y_1) bezüglich der Ellipse?

Beispiele. a) $9y^2 + 4x^2 = 36$; $x_1 = 5$, $y_1 = 7$;
b) $64y^2 + 36x^2 = 2304$; $x_1 = 6$, $y_1 = -\frac{3}{2}\sqrt{7}$;
c) $11y^2 + 3x^2 = 1$; $x_1 = \frac{1}{5}$, $y_1 = \frac{1}{8}$.

239. Die Brennpunkte der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ mögen als Pole betrachtet werden. Welches sind die Gleichungen der zugehörigen Polaren?

240. Auf der Direktrix $x = \frac{a^2}{e}$ liegt der Punkt P. Von demselben ist eine Gerade nach dem zugehörigen Brennpunkte $(e, 0)$ gezogen. Unter welchem Winkel schneidet diese Gerade die Polare des Punktes P?

241. Von dem Punkte (x_1, y_1) der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ist ein Strahl nach dem Brennpunkte $(e, 0)$ gezogen und ein Lot auf die zugehörige Direktrix gefällt. Wie verhalten sich die beiden Strecken zu einander?

242. Es ist der geometrische Ort eines Punktes zu finden, dessen Entfernung von dem Punkte $(k, 0)$ sich zu der von der Y-Achse wie m zu n verhält. $(m < n)$.

243. Gegeben ist die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. Von dem Fußpunkte der Direktrix $x = \frac{a^2}{e}$ ist eine Tangente an die Ellipse gelegt, und von einem Punkte dieser Geraden ein Lot auf die Hauptachse gefällt, endlich ist der Punkt, in dem dieses Lot die

Ellipse schneidet, mit dem Brennpunkte $(e, 0)$ verbunden. Wie verhält sich diese Verbindungslinie zu dem Lote?

244. Von dem Punkte (x_1, y_1) soll eine Gerade gezogen werden, welche die Polare dieses Punktes bezüglich der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ halbiert.

245. Gegeben ist die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ und der Punkt (x_1, y_1). Die Polare des Punktes bezüglich der Ellipse soll durch Konstruktion gefunden werden.

246. Die Gerade $Lx + My + N = 0$ möge als Polare bezüglich der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ betrachtet werden. Welches sind die Koordinaten des zugehörigen Poles?

Beispiele. a) $16y^2 + x^2 = 16, \quad x + 6y - 3 = 0.$
b) $20y^2 + 75x^2 = 1500, \quad 21x + 25y - 525 = 0.$

247. Gegeben ist eine Ellipse und eine Brennpunktsehne derselben. Wie läßt sich der Pol durch Konstruktion finden, wenn die Brennpunktsehne als Polare betrachtet wird?

248. An eine Ellipse ist im Punkte P derselben eine Tangente zu legen. Bekannt ist die Lage eines Brennpunktes F derselben und der zugehörigen Direktrix d.

249. Der Punkt P (x_1, y_1) ist mit dem Brennpunkte $(e, 0)$ der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ verbunden und in diesem Brennpunkte auf der Verbindungslinie ein Lot errichtet. Es ist zu zeigen, daß das Lot, die Polare des Punktes P und die dem Brennpunkte $(e, 0)$ zugehörige Direktrix sich in einem Punkte schneiden.

250. Der Punkt P (x_1, y_1) ist mit dem Mittelpunkte der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ verbunden, und die Verbindungslinie schneidet die Direktrix $x = \frac{a^2}{e}$ im Punkte K. Unter welchem Winkel schneidet die Gerade, welche von K nach F $(e, 0)$ geht, die Polare des Punktes P?

251. Die Tangenten des Hauptkreises der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ mögen als Polaren der Ellipse betrachtet werden. Auf welcher Linie liegen die zugehörigen Pole?

252. Über der kleineren Achse der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ als Durchmesser ist ein Kreis beschrieben. Eine Polare der Ellipse möge als Tangente an diesem Kreise fortgleiten. Auf welcher Linie bewegt sich der Pol?

253. Die Tangenten des Kreises $x^2+y^2=a^2+b^2$ mögen als Polaren der Ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ betrachtet werden. Es ist die Gleichung der Kurve zu bestimmen, auf der die zugehörigen Pole liegen.

254. Der Pol P möge

α) auf dem Kreise $x^2+y^2=a^2$,
β) auf dem Kreise $x^2+y^2=b^2$,
γ) auf dem Kreise $x^2+y^2=a^2+b^2$

fortrücken. Welches ist in jedem einzelnen Falle die Gleichung der Enveloppe der Polaren bezüglich der Ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$?

255. Über der großen Achse $2a$ ist ein System von Ellipsen konstruiert, welches der Gleichung $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ entspricht (die variabele Konstante ist b). Auf welcher Linie liegen die Pole, wenn die Gerade $Lx+My+N=0$ als Polare bezüglich der Ellipsen des Systems betrachtet wird?

256. Gegeben ist ein System konfokaler Ellipsen, welches der Gleichung $a^2y^2+(a^2-c^2)x^2=a^2(a^2-e^2)$ entspricht. (Die variabele Konstante ist a.) Welches ist der geometrische Ort des Poles, wenn die Gerade $Lx+My+N=0$ als Polare bezüglich der Ellipsen des Systems gilt?

257. Über der Achse $2a$ ist ein System von Ellipsen konstruiert. Welche Lage haben die Polaren des Punktes $P(x_1, y_1)$ bezüglich der Ellipsen des Systems?

Durchmesser der Ellipse.

258. Welches ist die Gleichung der Polare des unendlich fernen Punktes P bezüglich der Ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$?

259. In welchem Verhältnis wird jede nach dem unendlich fernen Punkte P gerichtete Sehne durch die zugehörige Polare (Durchmesser) geteilt?

260. Welcher Gleichung entspricht die Sehnenschar der Ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, von denen jede von dem Durchmesser $y=Ax$ halbiert wird?

261. Die Gleichung eines Durchmessers der Ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ ist $y=Mx$. Welches ist die Gleichung des konjugierten Durchmessers?

262. In der Ellipse $13x^2+11y^2=143$ entspricht ein Durchmesser der Gleichung $y=\frac{3}{2}x$. Es soll durch den Punkt $x_1=1, y_1=2$

eine Sehne gezogen werden, welche von dem gegebenen Durchmesser halbiert wird.

263. In der Fläche der Ellipse $36y^2 + 9x^2 = 324$ ist der Punkt $x_1 = 4$, $y_1 = 2$ gegeben. Es soll die Gleichung der Sehne bestimmt werden, die in diesem Punkte halbiert wird.

264. Gegeben ist die Ellipse $15y^2 + 4x^2 = 60$. Durch den Punkt $x_1 = 1$, $y_1 = \frac{3}{2}$ ist ein Durchmesser gezogen. Welches ist die Gleichung des konjugierten Durchmessers? In welchen Punkten schneiden die Durchmesser die Ellipse?

265. In einer Ellipse ist ein Durchmesser gezogen. Der konjugierte Durchmesser ist durch Konstruktion zu finden.

266. Von einer gegebenen Ellipse ist die Lage des Mittelpunktes durch Konstruktion zu bestimmen.

267. Der Punkt P auf der Peripherie einer Ellipse ist mit den Endpunkten eines Durchmessers derselben verbunden. Es ist zu zeigen, daß durch diese Sehnen die Richtungen zweier konjugierten Durchmesser bestimmt sind.

268. In einer Ellipse sind zwei konjugierte Durchmesser zu ziehen, welche einen gegebenen Winkel mit einander einschließen.

269. Ein Durchmesser der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ fällt mit der Geraden $y = Mx$ zusammen. In den Endpunkten dieses Durchmessers sind Tangenten an die Ellipse gelegt. Welche Winkel schließen dieselben mit dem konjugierten Durchmesser ein?

270. An eine Ellipse ist in einem gegebenen Punkte P derselben eine Tangente zu legen.

271. An eine Ellipse sind Tangenten in gegebener Richtung zu legen.

272. Gegeben sind vier Durchmesser $y = M_1x$, $y = M_2x$, $y = M_3x$, $y = M_4x$ der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. Es ist zu zeigen, daß das Doppelverhältnis derselben gleich dem der konjugierten Durchmesser ist.

273. Wie läßt sich nachweisen, daß die konjugierten Durchmesser der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ein involutorisches Strahlenbüschel bilden?

274. Von der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ sind zwei Paare konjugierter Durchmesser gegeben

$$y - M_1x = 0,\ y + \frac{b^2}{a^2M_1}x = 0;\ y - M_2x = 0,\ y + \frac{b^2}{a^2M_2}x = 0.$$

Es sollen die Gleichungen der Doppelstrahlen des involutorischen Strahlenbüschels bestimmt werden.

275. In der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ seien die Endpunkte je zweier konjugierten Durchmesser mit einander verbunden. Welches ist die Gleichung der Kurve, die von allen diesen Ellipsensehnen berührt wird?

276. Gegeben ist die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ und der Durchmesser $y = Mx$. Welche Länge hat dieser Durchmesser? Welche Länge besitzt der konjugierte Durchmesser?

Beispiel. $49y^2 + 9x^2 = 441$, $y = \frac{5}{4}x$.

277. Gegeben ist die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ und auf derselben der Punkt (x_1, y_1). Welchen Winkel schließt der durch diesen Punkt gehende Durchmesser mit dem konjugierten ein? Wie lang ist der konjugierte Durchmesser? Was wird aus der Ellipse, wenn je zwei konjugierte Durchmesser einen rechten Winkel einschließen?

Beispiel. $25y^2 + 4x^2 = 100$; $x_1 = 4$, $y_1 = \frac{6}{5}$.

278. Nach dem Punkte $P\ (x_1, y_1)$ einer Ellipse sind die beiden Brennstrahlen gezogen, außerdem aber der Durchmesser konstruiert, welcher dem durch P gehenden konjugiert ist. In welcher Beziehung steht das Rechteck aus den Brennstrahlen zu dem Quadrate über dem halben konjugierten Durchmesser?

279. In der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, wo $a^2 = 3b^2$ ist, schließen zwei konjugierte Durchmesser einen Winkel von 120^0 ein. Unter welchen Winkeln sind dieselben gegen die Hauptachse geneigt?

280. Die beiden Achsen einer Ellipse sind $2a$ und $2b$, zwei konjugierte Durchmesser derselben $2a_1$ und $2b_1$, der von den beiden letzteren eingeschlossene Winkel φ. Welche Beziehungen lassen sich zwischen diesen Größen aufstellen?

281. Gegeben sind zwei konjugierte Durchmesser einer Ellipse $2a_1 = 14$, $2b_1 = 10$ und der von diesen eingeschlossene Winkel $\varphi = 110^0$. Wie groß sind die Hauptachsen der Ellipse?

282. Die Gleichung einer Ellipse ist $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. Welche konjugierten Durchmesser derselben sind untereinander gleich? Welchen Winkel φ schließen beide ein? Unter welchen Winkeln sind dieselben gegen die Hauptachse geneigt?

Beispiel. $64y^2 + 25x^2 = 1600$.

283. In der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ sind die Endpunkte der beiden konjugierten Durchmesser $2a_1$ und $2b_1$ verbunden. Wie groß ist der Inhalt des eingeschriebenen Parallelogramms?

284. In den Endpunkten der beiden konjugierten Durchmesser $2a_1$ und $2b_1$ der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ sind Tangenten an die Kurve gelegt. α) Welches ist der Inhalt des umschriebenen Parallelogramms? β) Es ist nachzuweisen, daß auch die Diagonalen dieses Parallelogramms konjugierte Durchmesser der Ellipse sind.

285. Gegeben sind zwei konjugierte Durchmesser einer Ellipse $2a_1$ und $2b_1$. Es soll die Gleichung der Kurve für diese beiden Durchmesser als Koordinatenachsen bestimmt werden. (a_1 sei gegen die Hauptachse unter dem Winkel α, b_1 unter dem Winkel α_1 gegen dieselbe geneigt.)

286. Die beiden konjugierten Durchmesser einer Ellipse $2a_1$ und $2b_1$ werden als Koordinatenachsen betrachtet. Welche Bedingungsgleichung muß erfüllt sein, wenn die Ellipse von der Geraden $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0$ berührt werden soll?

287. Die Gleichung der Ellipse auf zwei konjugierte Durchmesser $2a_1$ und $2b_1$ als Koordinatenachsen bezogen ist $a_1^{\,2}y^2 + b_1^{\,2}x^2 = a_1^{\,2}b_1^{\,2}$. Welches ist die Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1) derselben?

288. Welches sind die Koordinaten des Poles, wenn die Gerade $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0$ als Polare bezüglich der Ellipse $a_1^{\,2}y^2 + b_1^{\,2}x^2 = a_1^{\,2}b_1^{\,2}$ betrachtet wird?

289. Die Verlängerungen der beiden konjugierten Durchmesser $2a_1$ und $2b_1$ werden von einer Tangente, deren Berührungspunkt P ist, in den Punkten R und S geschnitten. Wie groß ist das Rechteck aus den beiden Abschnitten der Tangente PR und PS?

290. In den Endpunkten eines Durchmessers K und K_1 sind Tangenten an eine Ellipse gelegt. Eine dritte Tangente, deren Berührungspunkt P ist, schneidet die erste im Punkte R, die zweite im Punkte S. Wie groß ist das Rechteck, welches sich aus den Abschnitten der dritten Tangente PR und PS bilden läßt?

291. In den Endpunkten K und K_1 des Durchmessers $2a_1$ sind Tangenten an eine Ellipse gelegt. Eine dritte Tangente berührt die Kurve im Punkte P und schneidet die erste Tangente in R, die zweite in S. Wie groß ist das Rechteck aus den Abschnitten der beiden parallelen Tangenten KR und K_1S?

292. Durch einen Brennpunkt einer Ellipse sind zwei Sehnen gezogen, welche zwei beliebigen konjugierten Durchmessern der Kurve parallel laufen. Wie groß ist die Summe dieser beiden Sehnen?

Die Ellipse als geometrischer Ort.

293. In dem Kreise $x^2 + y^2 = r^2$ ist jede Ordinate im Verhältnis m zu n geteilt. Auf welcher Kurve liegen die Teilpunkte?

Beispiel. $x^2 + y^2 = 36$; $m = 1$, $n = 1$.

294. Von den Punkten des Kreises $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ sind Lote auf die Y-Achse gefällt und jedes derselben halbiert. Welches ist der geometrische Ort des Halbierungspunktes?

295. Gegeben ist die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. Durch den obern Endpunkt der kleineren Achse P sind Sehnen gezogen und jede derselben halbiert. Welches ist der geometrische Ort des Halbierungspunktes?

296. Auf welcher Kurve liegen die Spitzen aller Dreiecke, welche den Umfang u haben und über der Grundlinie c konstruiert sind?

297. Über der konstanten Grundlinie c sind Dreiecke konstruiert, so daß $4t_c^2 + 5h_c^2 = c^2$ ist (t_c ist die Schwerpunkttransversale, welche durch den Halbierungspunkt von c geht, h_c die Höhe auf c). Welches ist die Gleichung der Kurve, auf welcher die Spitzen der Dreiecke liegen?

298. Über der konstanten Grundlinie c sind Dreiecke konstruiert, in denen das Produkt der Tangenten der Winkel an der Grundlinie gleich der positiven Konstanten k ist. Auf welcher Linie befinden sich die der gemeinschaftlichen Grundlinie gegenüberliegenden Spitzen?

299. Eine gerade Linie bewegt sich so, daß zwei Punkte derselben A und B auf den Schenkeln eines rechten Winkels fortrücken. Welche Linie beschreibt ein Punkt P der Geraden? Die Strecke AP werde $= b$, ferner $PB = a$ gesetzt.

300. Die Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks haben eine konstante Länge. Die Grundlinie fällt mit der X-Achse, der eine Endpunkt derselben mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammen. Welche Linie beschreibt der Punkt P des zweiten Schenkels, wenn sein Endpunkt längs der X-Achse fortgleitet?

301. Von einem Dreieck sind die Längen zweier Seiten a und b konstant, der Schnittpunkt derselben liegt im Koordinatenanfangspunkte und der veränderliche eingeschlossene Winkel wird durch die X-Achse halbiert. Welches ist der geometrische Ort des Halbierungspunktes der dritten Seite?

302. Von einem Dreieck ist die Grundlinie c, sowie die Summe der beiden andern Seiten $a + b$ konstant. Welches ist der geometrische Ort des Mittelpunktes des eingeschriebenen Kreises?

303. Die Seite c des Dreiecks ABC fällt mit der X-Achse, der Eckpunkt A mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammen, die der Seite c gegenüberliegende Spitze C bewegt sich auf der Ellipse $a_1{}^2 y_1{}^2 + b_1{}^2 x_1{}^2 = a_1{}^2 b_1{}^2$ fort. Welche Linie beschreibt in diesem Falle der Schwerpunkt des Dreiecks?

304. Über der großen Achse der Ellipse $y_1{}^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax_1 - x_1{}^2)$ als Grundlinie ist ein Dreieck konstruiert, dessen Spitze auf der Ellipse fortgleitet. Welches ist der geometrische Ort des Höhenpunktes?

305. Über dem Abstande der Brennpunkte der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ist ein Dreieck konstruiert, dessen andere Seiten zwei konjugierten Durchmessern parallel laufen. Welches ist der geometrische Ort der Spitze?

306. Gegeben ist die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ und der zugehörige Hauptkreis $y^2 + x^2 = a^2$. Zu der Abscisse x_1 gehört der Punkt A der Ellipse und der Punkt B des Kreises. Verbindet man A mit dem Brennpunkte $(e, 0)$, B mit dem Mittelpunkte des Kreises, so schneiden sich beide Linien im Punkte P. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P?

307. In den beiden konzentrischen Kreisen

$$y^2 + x^2 = r_1{}^2 \quad \text{und} \quad y^2 + x^2 = r_2{}^2$$

sind zwei zusammenfallende Radien gezogen. Von dem Endpunkte des größeren r_1 ist ein Lot auf die X-Achse gefällt und durch den Endpunkt von r_2 eine Parallele zur X-Achse gezogen, welche das Lot im Punkte K schneidet. Welche Linie beschreibt der Punkt K, wenn beide Radien um den Mittelpunkt mit derselben Winkelgeschwindigkeit gedreht werden?

308. Gegeben ist der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$. Von dem Punkte $(0, r)$ des Kreises ist ein Strahl gezogen, welcher die Peripherie des Kreises außerdem in M und die X-Achse in N schneidet. Es ist ferner der Punkt N mit dem festen Punkte $(0, b)$ verbunden, und diese Verbindungslinie schneidet die Ordinate des Punktes M in K. Auf welcher Linie bewegt sich der Punkt K fort, wenn der Punkt N längs der X-Achse fortgeschoben wird?

309. Gegeben ist der Kreis $y^2 + x^2 = r^2$. Q ist der obere Endpunkt des vertikalen Durchmessers, N ein zweiter fester Punkt auf demselben, S ein beliebiger Punkt der Peripherie. Zieht man von Q einen Strahl nach dem Fußpunkte F der Ordinate des Punktes S, durch N eine Parallele zu diesem Strahle, welche die X-Achse in H schneidet, so wird das Lot in H auf der X-Achse errichtet die durch S zur X-Achse gezogene Parallele in P schneiden. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P?

310. Gegeben ist der Kreis $y^2 = 2rx - x^2$. Der mit der X-Achse zusammenfallende Durchmesser ist AB. Durch A ist eine bewegliche Sehne gezogen, welche den Kreis in C schneidet. Die Ordinate dieses Punktes werde verdoppelt und der Endpunkt der Verlängerung mit B verbunden. Diese letztere Verbindungslinie möge die Verlängerung von AC im Punkte P schneiden. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P?

311. Die Gleichung eines gegebenen Kreises ist $y^2 = 2rx - x^2$. Durch den Koordinatenanfangspunkt O ist die Sehne OC gezogen, von C ein Lot auf die X-Achse gefällt und durch den Fußpunkt D desselben eine Parallele zu OC gelegt, welche eine Parallele zur X-Achse, die durch C geht, im Punkte P schneidet. Auf welcher Linie bewegt sich der Punkt P fort, wenn die Sehne OC um O gedreht wird?

312. Ein gegebener Kreis entspricht der Gleichung $y^2 + x^2 = 25$. In diesem Kreise iegt der Punkt P $(0, 3)$. Auf welcher Linie befinden sich die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch den Punkt P gehen und den gegebenen Kreis von innen berühren?

313. Zwei Kreise sind gegeben, welche den Gleichungen

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 - rx = 0$$

entsprechen. Der zweite berührt den ersten von innen. Welches ist die Gleichung der Kurve, auf der die Mittelpunkte aller Kreise liegen, welche die gegebenen Kreise berühren?

314. Von den beiden Kreisen $y^2 + x^2 = 16$ und $y^2 + x^2 - 2x = 0$ liegt der zweite vollständig in dem ersten. Welches ist der geometrische Ort des Mittelpunktes eines Kreises, der den kleineren von außen, den größeren von innen berührt?

315. Gegeben sind die beiden Kreise $y^2 + x^2 = 16$ und $y^2 + x^2 - 2x = 0$. Es ist ein Kreis konstruiert, der den zweiten Kreis einschließend berührt und von dem ersten einschließend berührt wird. Welches ist der geometrische Ort des Mittelpunktes?

316. In einem Kreise, der mit dem Radius $2a$ um den Koordinatenanfangspunkt beschrieben ist, rollt auf der Peripherie desselben ein anderer fort, dessen Radius a ist. Welche Kurve beschreibt der Halbierungspunkt P eines bestimmten Radius des bewegten Kreises?

317. Die Tangenten der Parabel $y^2 = 2rx$ mögen als Polaren bezüglich des Kreises $x^2 + y^2 - 2rx - r^2 = 0$ betrachtet werden. Auf welcher Linie liegen die zugehörigen Pole?

Konstruktionsaufgaben.

318. Von einer Ellipse sind die beiden Brennpunkte F und F_1 und ein Punkt des Umfanges P gegeben. Die Längen der Achsen sind durch Konstruktion zu finden.

319. Gegeben sind die beiden Brennpunkte F und F_1 einer Ellipse, sowie eine Tangente derselben t. Durch Konstruktion sind die Achsen und der Berührungspunkt der Tangente zu bestimmen.

320. Die Richtung der Hauptachse, ein Brennpunkt F, eine Tangente t, sowie deren Berührungspunkt P sind gegeben. Die Lage des zweiten Brennpunktes und die Größe der Achsen sind zu finden.

321. Die Länge der Hauptachse $2a$, sowie die Lage eines Brennpunktes F und einer Tangente t mit deren Berührungspunkte P sind bekannt. Die Lage des zweiten Brennpunktes, sowie die Länge und Lage der Nebenachse sind zu bestimmen.

322. Man kennt die Lagen zweier Tangenten t und t_1 mit den Berührungspunkten P und P_1, sowie die Lage des einen Brenn-

punktes F. Wo liegt der zweite Brennpunkt? Welche Längen haben die Achsen?

323. Von einer Ellipse ist ein Brennpunkt F gegeben, sowie ein Durchmesser d der Länge und Lage nach. Zu bestimmen ist der andere Brennpunkt, der konjugierte Durchmesser, die Hauptachse und die Nebenachse.

324. Gegeben sind drei Tangenten t_1, t_2, t_3 und ein Brennpunkt F einer Ellipse. Man soll durch Konstruktion den zweiten Brennpunkt und die Achsen finden.

325. Wenn ein Brennpunkt F, die Richtung der Hauptachse und die Lagen zweier Tangenten t_1 und t_2 gegeben sind, wie findet man den zweiten Brennpunkt?

326. Gegeben sind der Punkt O als Mittelpunkt, der eine Brennpunkt F und die Gerade MN als Tangente einer Ellipse. Es sollen die beiden Punkte der Ellipse gefunden werden, in denen sie von den beiden von einem Punkte P ausgehenden Tangenten berührt wird.

327. Von einer gegebenen Ellipse sind durch Konstruktion die Brennpunkte, die Achsen und die Tangenten zu finden, welche sich in einem gegebenen Punkte P schneiden.

328. Gegeben ist die Richtung der Hauptachse, der Mittelpunkt O und eine Tangente t mit ihrem Berührungspunkte P. Es sollen die Brennpunkte und die zugehörigen Direktrixen gefunden werden.

329. Von einer Ellipse ist die Lage und Größe der Hauptachse $2a$ bekannt, ebenso die Richtung einer Tangente t. Wie findet man die Lage der Brennpunkte und der Direktrixen?

330. Bekannt sind die Lage und Größe der größeren Achse $2a$, sowie die Lage eines Punktes P der Ellipse. Man soll die Länge der kleineren Achse, sowie die Lage der Brennpunkte bestimmen.

331. Gegeben sind die Richtung der größeren Achse, die Lage des Mittelpunktes O und zweier Punkte der Kurve P_1 und P_2. Wie findet man die Längen der Achsen und die Lage der Brennpunkte?

332. Wie findet man die Längen der Achsen und die Lage der Brennpunkte, wenn die Richtung der Hauptachse und zwei Tangenten t_1 und t_2 mit ihren Berührungspunkten P_1 und P_2 gegeben sind?

333. Die Lage und Länge der kleineren Achse $2b$ und die Lage eines Punktes P der Ellipse sind bekannt. Man soll die größere Achse und die Lage der Brennpunkte finden.

334. Gegeben sind die Lage und Länge der größeren Achse $2a$ und eine Tangente t. Es soll die Lage und Länge der kleineren Achse durch Konstruktion gefunden werden.

335. Wie findet man die Richtungen der Achsen einer Ellipse, wenn zwei konjugierte Durchmesser derselben $AA_1 = 2a_1$ und $BB_1 = 2b_1$ der Lage und Größe nach gegeben sind?

336. Die Richtung der Hauptachse, ein Punkt P, die zugehörige Polare p und eine Direktrix d einer Ellipse sind gegeben. Es soll der Brennpunkt gefunden werden, welcher der Direktrix d zugehört.

Flächeninhalt der Ellipse.

337. Von einer Ellipse, deren Gleichung $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ist, soll der Inhalt bestimmt werden.

Beispiel. $9y^2 + 4x^2 = 36$.

338. Die größere Achse einer Ellipse ist $2a = 10$, die lineare Excentricität derselben $e = 3{,}5$. Welches ist der Inhalt derselben?

339. Die Seite des einer Ellipse eingeschriebenen Rhombus ist s, die Entfernung eines Brennpunktes vom Mittelpunkte ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Halbachsen. Welches ist der Inhalt der Ellipse?

340. Gegeben sind zwei Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. Die Ordinaten der Punkte sind verlängert bis zum Durchschnitt mit dem Hauptkreise. In welchem Verhältnis steht das Segment des Hauptkreises zu dem der Ellipse?

341. Gegeben sind zwei Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ und die entsprechenden Punkte des Hauptkreises sind durch Verlängerung der Ordinaten bestimmt. Verbindet man die Punkte der Ellipse und die entsprechenden Punkte des Kreises mit dem Mittelpunkte, so erhält man zwei entsprechende Sektoren. In welchem Verhältnis stehen diese entsprechenden Sektoren?

342. Durch den Mittelpunkt der Ellipse $25y^2 + 9x^2 = 225$ ist ein Strahl gelegt, welcher unter einem Winkel von 60^0 gegen die Hauptachse geneigt ist. Welchen Inhalt hat der Sektor, welcher

von der Hauptachse, dem Strahle und dem dazwischen liegenden Bogen begrenzt wird?

343. In der Ellipse $11y^2 + 5x^2 = 55$ sind durch den Mittelpunkt zwei Strahlen gezogen, welche gegen die Hauptachse unter den Winkeln 30^0 und 45^0 geneigt sind. Welchen Inhalt hat der von denselben eingeschlossene Sektor?

344. Von einer Ellipse sind die Halbachsen $a = 7$, $b = 3$. Wie groß sind die Segmente der Ellipse, in welche dieselbe von einem Parameter zerlegt wird?

345. In der Ellipse $25y^2 + 16x^2 = 1600$ ist lotrecht zu der größeren Achse eine Sehne von der Länge $2\sqrt{15}$ gezogen. Welchen Inhalt haben die beiden Teile, in welche die Ellipse durch die Sehne zerlegt wird?

346. Die Hauptachse der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ wird durch eine zu derselben lotrechte Sehne im Verhältnis 1 zu 3 geteilt. In welchem Verhältnis stehen die dadurch entstandenen Segmente der Ellipse zu einander?

347. Gegeben ist die Ellipse $25y^2 + 9x^2 = 225$. Über dem Abstande der beiden Brennpunkte derselben als Durchmesser ist ein Kreis konstruiert. In welche Teile wird die Ellipse durch diesen Kreis zerlegt?

348. Gegeben ist die Ellipse $25y^2 + 16x^2 = 400$. Es ist eine Parabel konstruiert, welche den positiven Teil der Hauptachse zur Achse, den Mittelpunkt zum Scheitel und mit der Ellipse den einen Brennpunkt gemein hat. Wie groß sind die beiden Teile, in welche die Ellipse von der Parabel zerlegt wird?

Die Hyperbel.

Die Gleichung der Hyperbel.

349. Auf der X-Achse liegen die beiden Punkte $F(e, 0)$ und $F_1(-e, 0)$. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P, für den die Differenz der Entfernungen von den beiden festen Punkten F und F_1 gleich $2a$ ist?

350. Die Hauptachse einer Hyperbel $2a = 16$ fällt mit der X-Achse zusammen, die Nebenachse $2b = 14$ mit der Y-Achse. Welches ist die Gleichung derselben?

351. Die lineare Excentricität einer Hyperbel ist $e = 13$, die Nebenachse $2b = 24$. Welches ist die Gleichung derselben, wenn die Hauptachse mit der X-Achse, die Nebenachse mit der Y-Achse zusammenfällt?

352. Die doppelte lineare Excentricität $2e$ einer Hyperbel ist dreimal so groß als die Hauptachse $2a$ derselben. Welches ist die Gleichung der Hyperbel? (Über die Lage der Achsen s. Aufg. 351.)

353. Gegeben ist die Hauptachse einer Hyperbel $2a = 8$ und die Koordinaten eines Punktes der Kurve $x_1 = 10$, $y_1 = 25$. Welches ist die Gleichung derselben? (Über die Lage der Achsen s. Aufg. 351.)

354. Zur Bestimmung der Gleichung einer Hyperbel, deren Hauptachse mit der X-Achse und deren Mittelpunkt mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammenfällt, sind die Koordinaten zweier Punkte der Kurve (x_1, y_1) und (x_2, y_2) gegeben.

Beispiel. $x_1 = 5$, $y_1 = 3$; $x_2 = 8$, $y_2 = -10$.

355. Für welchen Punkt der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ ist die Abscisse gleich der Ordinate?

356. Wie groß ist der Parameter, d. i. eine zur Hauptachse lotrechte Brennpunktsehne der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$?

357. Die Hauptachse einer Hyperbel fällt mit der X-Achse, der Mittelpunkt mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammen. Welches ist die Gleichung der Kurve, wenn der Parameter derselben $= p$, die doppelte lineare Excentricität $= 2e$ ist?

Beispiel. $p = 8$, $2e = 10$.

358. Jede Ordinate der gleichseitigen Hyperbel $y^2 - x^2 = -a^2$ läßt sich als mittlere Proportionale zwischen zwei Strecken darstellen. Welches sind diese Strecken?

359. Gegeben ist die Gleichung einer Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ und die Koordinaten eines Punktes P derselben x_1, y_1. Welches sind die Gleichungen der Brennstrahlen, die sich nach diesem Punkte ziehen lassen? Wie lang sind dieselben?

Beispiel. $9y^2 - 20x^2 = -180$; $x_1 = 5$, $y_1 > 0$.

360. In welcher Beziehung steht die Summe der beiden Brennstrahlen eines Punktes der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ zu der Abscisse desselben?

361. Die Gleichung einer Hyperbel ist $25y^2 - 9x^2 = -225$. Nach dem Punkte $x_1 = 13$, $y_1 = 7{,}2$ derselben sind die Brennstrahlen gezogen. Welchen Winkel schließen diese beiden Geraden mit einander ein?

362. Für welchen Punkt der Hyperbel $16y^2 - x^2 = -16$ ist das Rechteck aus den Brennstrahlen gleich $100\square$?

363. Von dem Fußpunkte einer Ordinate y_1 der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ ist eine Tangente t_1 an den Kreis über der Hauptachse gelegt. Wie verhält sich die Tangente t_1 zu der Ordinate y_1 der Hyperbel? Wie gestaltet sich das Verhältnis, wenn die Hyperbel eine gleichseitige ist?

364. Von dem Fußpunkte einer Ordinate (y_1) der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ ist eine Tangente t_1 an den Kreis über der Hauptachse gezogen. Es soll der Winkel bestimmt werden, unter dem diese Tangente gegen die X-Achse geneigt ist.

365. Die Achsen einer Hyperbel $2a = 14$ und $2b = 20$ laufen den Koordinatenachsen parallel, die Koordinaten des Mittelpunktes sind $x_1 = 5$, $y_1 = -4$. Welches ist die Gleichung der Hyperbel?

366. Gegeben ist die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$. Welche Gestalt nimmt die Gleichung dieser Kurve an, wenn man die Gerade $x = a$ als Y-Achse betrachtet? (Scheitelgleichung.)

367. Die Scheitelgleichung einer Hyperbel ist $y^2 = 16\frac{1}{3}x + 1\frac{13}{36}x^2$? Wie groß sind die Achsen der Kurve?

368. Für die Scheitelgleichung einer Hyperbel sind die Koordinaten eines Punktes x_1, y_1 und die Größe des Parameters p gegeben. Wie groß ist die Hauptachse der Hyperbel? Wie lautet die Scheitelgleichung?

369. Der Abstand der Brennpunkte $2e$ und die Größe der Nebenachse $2b$ einer Hyperbel sind bekannt. Welches ist die Scheitelgleichung der Hyperbel?

370. Welches ist die Polargleichung einer Hyperbel, wenn der Mittelpunkt derselben als Pol, die Hauptachse als Achse angenommen wird?

371. Es soll die Polargleichung einer Hyperbel, deren Achsen $2a$ und $2b$ sind, bestimmt werden, wenn einer der beiden Brennpunkte als Pol und die Verbindungslinie beider als Achse angesehen wird.

372. Wie groß ist das Rechteck, welches aus den Abschnitten einer Brennpunktsehne einer Hyperbel gebildet wird?

373. Für welche Anomalie ist der Radiusvektor einer Hyperbel a) gleich dem Parameter? b) gleich der Hauptachse? c) gleich dem Abstande der beiden Brennpunkte, wenn der rechtsliegende Brennpunkt als Pol angesehen wird?

374. Wie groß ist das harmonische Mittel zwischen den Abschnitten einer Brennpunktsehne der Hyperbel?

375. Durch einen Brennpunkt einer Hyperbel sind zwei Sehnen s_1 und s_2 gezogen, welche rechtwinklig zu einander stehen. Wie groß ist die Summe der reciproken Werte derselben?

Die Hyperbel und die Gerade.

376. Es sollen die Koordinaten der Punkte bestimmt werden, in denen die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ von der Geraden $y = Mx + n$ geschnitten wird.

Beispiele. 1) $4y^2 - 9x^2 = -36, \quad y = \frac{1}{2}x - 3;$
2) $9y^2 - 25x^2 = -225, \quad 12y + 25x = 45;$
3) $5y^2 - 16x^2 = -80, \quad y = 4x + 1.$

377. Welches ist die geometrische Bedeutung der Relation

$$b^2 + n^2 - a^2M^2 \gtreqless 0?$$

378. Wo liegen die Punkte, in denen die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ von den Geraden, welche der Gleichung $y = \pm \frac{b}{a}x + n$ entsprechen, geschnitten wird? Wie gestalten sich die Resultate, wenn $n = 0$ gesetzt wird?

379. In welchen Punkten wird die Hyperbel $y^2 = 9x + 11x^2$ von der Geraden $y = 4x + 3$ geschnitten?

380. Welches ist die Gleichung einer Hyperbel, deren Achsen $2a$ und $2b$ mit den Koordinatenachsen zusammenfallen, in Linienkoordinaten?

381. Gegeben der Kreis $y^2 + (x + k)^2 = r^2$ und der Punkt $P(k, 0)$. Von dem letzteren sind alle möglichen Sekanten in den Kreis gezogen, jedes der beiden Segmente einer Sekante ist halbiert und in den Halbierungspunkten sind Lote errichtet. Die Kurve, welche diese Lote einhüllt, ist zu bestimmen.

382. Gegeben der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ und der Punkt $P(x_1, 0)$. Durch den letzteren geht der eine Schenkel eines rechten Winkels, während der Scheitel auf der Peripherie des Kreises fortgleitet. Welche Kurve umhüllt die Lagen des anderen Schenkels?

383. Gegeben sind zwei Gerade $y = \pm d$ und das Kreisbüschel $x^2 + y^2 - 2kx - f^2 = 0. (d < f.)$ In jedem Kreise des Büschels sind die beiden Durchmesser gezogen, welche die Schnittpunkte des Kreises und der beiden Geraden verbinden. Welches ist die Enveloppe dieser Durchmesser?

384. In welchen Punkten schneidet die Hyperbel

$$9y^2 - 25x^2 - 54y - 50x + 281 = 0$$

die Koordinatenachsen? Welches ist die Gleichung dieser Hyperbel in Linienkoordinaten?

385. Durch den Punkt $x_1 = 12$, $y_1 = 3$ ist in die Hyperbel $9y^2 - 16x^2 = -144$ eine Sehne zu ziehen, die in diesem Punkte halbiert wird. Welche Stücke schneidet diese Sehne auf den Koordinatenachsen ab? Unter welchem Winkel ist dieselbe gegen die X-Achse geneigt?

386. Vom Koordinatenanfangspunkte sind an die Hyperbel $9y^2 - 25x^2 - 18y - 100x + 134 = 0$ Tangenten zu legen. Welches sind die Gleichungen derselben?

387. In die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ ist ein Quadrat einzuzeichnen. Welches sind die Koordinaten der Eckpunkte?

388. In die Hyperbel $5y^2 - 3x^2 = -10$ soll ein gleichseitiges Dreieck beschrieben werden, dessen eine Spitze in einem Scheitel liegt. Welches sind die Gleichungen der Seiten?

389. Es soll ein Rechteck in die Hyperbel $12y^2 - 7x^2 = -112$ eingezeichnet werden, dessen Inhalt gleich dem Quadrate über der Hauptachse ist. Welches sind die Koordinaten der Ecken?

390. Gegeben ist eine Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$. In dieselbe ist ein Rechteck zu zeichnen, dessen Seiten sich wie m zu n verhalten. Die Koordinaten der Ecken sind zu bestimmen.

Beispiel. $4y^2 - x^2 = -60$; $m = 2$, $n = 5$.

Tangente und Normale der Hyperbel.

391. An die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ ist im Punkte (x_1, y_1) derselben eine Tangente gelegt. Welches ist die Gleichung

derselben? Welche Stücke schneidet sie auf den Koordinatenachsen ab?

Beispiele. a) $13y^2 - 5x^2 = -65$; $x_1 = 13$, $y_1 = 2\sqrt{15}$;
b) $7y^2 - 16x^2 = -112$, $x_1 = -4$, $y_1 < 0$.

392. Von den Brennpunkten der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ sind Lote auf die Tangenten der Kurve gefällt. Welches ist der geometrische Ort der Fußpunkte derselben?

393. Gegeben ist die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$. Von dem Brennpunkte $(e, 0)$ sind Lote auf alle Tangenten des zugehörigen Hyperbelzweiges gefällt. Auf welcher Kurve liegen die Gegenpunkte des Brennpunktes?

394. Für welche Punkte der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ sind die Tangenten derselben unter dem gegebenen Winkel α gegen die X-Achse geneigt?

Beispiel. $100y^2 - 9x^2 = -900$, $\angle \alpha = 60^0$.

395. Von einem Punkte P soll an eine gegebene Hyperbel eine Tangente gelegt werden.

396. Durch Konstruktion sind diejenigen Tangenten einer gegebenen Hyperbel zu bestimmen, welche der Geraden g parallel laufen.

397. Die Hyperbel $9y^2 - 16x^2 = -144$ soll durch eine Gerade berührt werden, welche der Geraden $y = 4x - 3$ parallel läuft. Welches ist die Gleichung derselben?

398. Wie groß ist der Inhalt des Rechtecks, welches durch die Lote gebildet wird, die sich von den Brennpunkten der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ auf eine Tangente derselben fällen lassen?

399. In jedem der Punkte der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$, dessen Brennstrahlen unter dem Winkel α zu einander geneigt sind, sollen Tangenten an die Kurve gezogen werden. Welches sind die Gleichungen derselben?

Beispiel. $7y^2 - 9x^2 = -63$, $\angle \alpha = 90^0$.

400. In dem Punkte (x_1, y_1) der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ ist die Normale konstruiert. Welches ist die Gleichung derselben?

Beispiel. $25y^2 - 64x^2 = -1600$; $x_1 = 13$, $y_1 > 0$.

401. Gegeben ist die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$. Im Punkte (x_1, y_1) sind Tangente und Normale konstruiert. Welche Länge hat die Tangente? Welche Länge die Normale? Wie lang

ist die Subtangente? Wie lang die Subnormale? Wie lauten die Resultate, wenn die Hyperbel eine gleichseitige ist?

Beispiel. $7y^2 - 16x^2 = -112$; $x_1 = 4$, $y_1 > 0$.

402. Nach einem Punkte der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ sind die Radienvektoren gezogen, und zwar ist der Neigungswinkel des einen zur X-Achse doppelt so groß als der des andern. Wie lang ist die Normale, die sich in diesem Punkte der Hyperbel konstruieren läßt?

Beispiel. $9y^2 - 16x^2 = -144$.

403. Gegeben ist die Gleichung der Hyperbel $4y^2 - 25x^2 = -100$ und die Länge einer Subnormale derselben $S_n = 30$. Welches sind die Koordinaten des zugehörigen Punktes?

404. Für welchen Punkt der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ ist die Subtangente gleich der Subnormale?

405. Gegeben ist die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$. Es sollen die Koordinaten derjenigen Punkte gesucht werden, für welche die Tangente doppelt so groß ist als die Normale.

406. Für welche Punkte der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ ist das Rechteck aus der Tangente und der Ordinate gleich dem Quadrate über der Normale?

407. Es ist zu zeigen, daß die Tangente an einem Punkte $P(x_1, y_1)$ der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ den Winkel halbiert, welchen die nach dem Berührungspunkte P gezogenen Radienvektoren mit einander einschließen.

408. Gegeben ist eine Hyperbel und auf derselben der Punkt P. Wie läßt sich in diesem Punkte an die Kurve eine Tangente legen?

409. Eine Ellipse und eine Hyperbel haben die Brennpunkte gemein. Welche Winkel schließen die Tangenten beider Kurven an den Schnittpunkten ein?

410. Gegeben sind die gleichseitige Hyperbel $y^2 - x^2 = -a^2$ und der Kreis $y^2 + x^2 = 9a^2$. Unter welchen Winkeln durchschneiden sich die beiden Kurven?

411. Von dem Brennpunkte $(e, 0)$ der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ ist ein Lot auf eine Tangente der Kurve gefällt, deren Berührungspunkt (x_1, y_1) ist. Wie groß ist das Rechteck aus dem Lot und der Normale, welche durch den Punkt (x_1, y_1) geht?

412. An die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ sind die beiden Scheiteltangenten gelegt und eine dritte Tangente, deren Berührungspunkt (x_1, y_1) ist. Von welchen Punkten der Hauptachse aus erscheint der Abschnitt der dritten Tangente, welcher zwischen den Scheiteltangenten liegt, unter rechtem Winkel?

413. Gegeben ist die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$. In den Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) sind die Tangenten an dieselbe gelegt. Wie groß ist der Winkel, den die Tangenten einschließen?

Beispiel. $4y^2 - 9x^2 = -36$; $x_1 = 3$, $y_1 > 0$; $x_2 = 4$, $y_2 < 0$.

414. Längs der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ gleiten zwei Tangenten fort, welche einen rechten Winkel einschließen. Welches ist die Gleichung des geometrischen Ortes des Scheitels des rechten Winkels? Wie gestaltet sich das Resultat, wenn die Hyperbel eine gleichseitige ist?

415. Von dem Punkte $P(x_1, y_1)$ sollen Tangenten an die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ gelegt werden. Welches sind die Gleichungen derselben?

Beispiel. $9y^2 - 25x^2 = -225$; $x_1 = 2$, $y_1 = 5$.

Asymptoten der Hyperbel.

416. Welche Form nimmt die Gleichung einer Tangente der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ an, wenn man den Berührungspunkt in die Unendlichkeit rücken läßt?

Beispiel. $25y^2 - 49x^2 = -1225$.

417. Welches sind die Gleichungen der Tangenten, die sich vom Mittelpunkte der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ an dieselbe legen lassen?

Beispiel. $4y^2 - 81x^2 = -324$.

418. Welchen Winkel bilden die beiden Asymptoten der Hyperbel $5y^2 - 4x^2 = -100$ mit einander?

419. Von einem Brennpunkte der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ sind Lote auf die Asymptoten gefällt. Wie lang ist jedes der Lote? Welchen Inhalt hat das Viereck, welches von den Asymptoten und den Loten begrenzt wird?

420. Gegeben ist die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$. Welche Gestalt nimmt die Gleichung der Kurve an, wenn die Asymptoten derselben zu Koordinatenachsen gewählt werden?

421. Im Punkte (x_1, y_1) ist an die Hyperbel $xy = \frac{a^2 + b^2}{4}$ eine Tangente gelegt. Welches ist die Gleichung derselben?

422. Welcher Bedingung müssen die Konstanten der Gleichung $y = Mx + n$ genügen, wenn die derselben entsprechende Gerade Tangente der Hyperbel $xy = \frac{a^2 + b^2}{4}$ sein soll?

423. An die Hyperbel $xy = \frac{a^2 + b^2}{4}$ ist im Punkte (x_1, y_1) eine Tangente zu legen. Wie lässt sich die Konstruktion ausführen?

424. Es ist zu zeigen, daß jede von den Asymptoten begrenzte Tangente der Hyperbel im Berührungspunkte halbiert wird.

425. Es soll der Inhalt eines Dreiecks bestimmt werden, welches von den beiden Asymptoten und einer Tangente der Hyperbel begrenzt wird. Wie verhält sich dasselbe zu dem Rechteck aus den Koordinaten des Berührungspunktes?

426. Von einem Punkte der Hyperbel sind Parallelen zu den Asymptoten gezogen. Es soll der Inhalt des Parallelogramms bestimmt werden, welches von diesen Linien begrenzt wird.

427. Die Halbachsen einer Hyperbel sind a und b. Welches ist die Gleichung der Kurve in Linienkoordinaten, wenn die Abschnitte auf den Asymptoten liegen sollen?

Pol und Polare.

428. Gegeben sind die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ und der Punkt $P(x_1, y_1)$. Welches ist die Polare des Punktes P bezüglich der Hyperbel?

Beispiele. a) $9y^2 - 25x^2 = -225;\ x_1 = 1,\ y_1 = 11.$
b) $12y^2 - 7x^2 = -112;\ x_1 = -9,\ y_1 = 7.$

429. Von dem Punkte $P(x_1, y_1)$ sind Tangenten an die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ gezogen. Welches sind die Koordinaten der Berührungspunkte?

Beispiel. $6y^2 - 11x^2 = -66;\ x_1 = 2,\ y_1 = 3.$

430. Die Asymptotengleichung einer Hyperbel ist $xy = \frac{a^2 + b^2}{4}$. Welches ist die Gleichung der Polare des Punktes $P(x_1, y_1)$ bezüglich derselben?

431. Die Brennpunkte der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ mögen als Pole betrachtet werden. Welches sind die Gleichungen der zugehörigen Polaren? Welchen Gleichungen entsprechen diese Polaren, wenn die Asymptotengleichung der Hyperbel gegeben ist?

432. Wie groß sind die Stücke, welche durch die Direktrixen auf den Asymptoten der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ abgeschnitten werden?

433. Von einem Punkte $P(x_1, y_1)$ der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ ist ein Strahl nach einem Brennpunkte gezogen und ein Lot auf die dem Brennpunkte zugehörige Direktrix gefällt. In welchem Verhältnis stehen diese beiden Linien?

434. Es soll der geometrische Ort eines Punktes gefunden werden, dessen Entfernung von dem Punkte $(k, 0)$ sich zu der von der Y-Achse wie m zu n verhält. $(m > n.)$

435. Von dem Punkte $P(x_1, y_1)$ der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ ist eine Parallele zu einer Asymptote gezogen und bis zum Durchschnitt mit einer Direktrix verlängert. Wie verhält sich diese Linie zu dem Brennstrahle, der den Punkt P mit dem der Direktrix zugehörigen Brennpunkte verbindet?

436. Von einem Punkte P der Direktrix $x = \frac{a^2}{e}$ ist ein Strahl nach dem zugehörigen Brennpunkte $(e, 0)$ gezogen. Unter welchem Winkel schneidet dieser Strahl die Polare des Punktes P bezüglich der Hyperbel?

437. Gegeben ist eine Hyperbel und auf derselben der Punkt P. Wie läßt sich in diesem Punkte an die Kurve eine Tangente legen?

438. Gegeben ist die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$. Von dem Fußpunkte der Direktrix $x = \frac{a^2}{e}$ ist eine Tangente an die Hyperbel gelegt und von einem Punkte P dieser Geraden ein Lot auf die Hauptachse gefällt, welches die Hyperbel in Q schneidet. Wie verhält sich der Brennstrahl, der von Q nach $(e, 0)$ geht, zu dem Lote?

439. Der Punkt $P(x_1, y_1)$ ist mit dem Brennpunkte $(e, 0)$ verbunden und in diesem Brennpunkte ist auf der Verbindungslinie ein Lot errichtet. Wie groß ist der Inhalt des Dreiecks, welches das Lot, die Polare des Punktes P und die zu $(e, 0)$ gehörige Direktrix einschließen?

440. Die Gerade $Lx + My + N = 0$ möge als Polare bezüglich der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ betrachtet werden. Welches sind die Koordinaten des zugehörigen Poles?

Beispiele. a) $9y^2 - 15x^2 + 135 = 0, \quad y = \frac{1}{4}x - 3$;

b) $25y^2 - 36x^2 + 900 = 0, \quad \frac{y}{3} - \frac{x}{4} = 1$.

441. Die Tangenten des Hauptkreises der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ mögen als Polaren der letzteren betrachtet werden. Auf welcher Linie liegen die zugehörigen Pole?

442. Gegeben ist die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ und der Kreis $y^2 + x^2 = a^2 + b^2$. Eine Polare der Hyperbel gleite als Tangente an dem Kreise fort. Auf welcher Kurve bewegt sich der zugehörige Pol?

443. Gegeben ist die Hyperbel

$$a^2y^2 + (a^2 - e^2)x^2 = a^2(a^2 - e^2) \quad [e > a]$$

und die ihr konfokale Ellipse

$$a_1^{\,2}y^2 + (a_1^{\,2} - e^2)x^2 = a_1^{\,2}(a_1^{\,2} - e^2) \quad [e < a_1];$$

die Tangenten der Ellipse mögen als Polaren bezüglich der Hyperbel betrachtet werden. Auf welcher Kurve liegen die zugehörigen Pole?

444. Gegeben ist ein System konfokaler Hyperbeln, welches der Gleichung $a^2y^2 - (e^2 - a^2)x^2 + a^2(e^2 - a^2) = 0$ entspricht. Die Gerade $Lx + My + N = 0$ werde als Polare bezüglich jeder Hyperbel des Systems betrachtet. Auf welcher Kurve liegen die zugehörigen Pole?

445. Der Pol P möge auf der Peripherie des Kreises $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ fortrücken. Es soll die Gleichung der Kurve bestimmt werden, welche die Polaren bezüglich der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ einhüllt.

446. Gegeben ist ein Büschel von Hyperbeln

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 + k(a_1^{\,2}y^2 - b_1^{\,2}x^2 + a_1^{\,2}b_1^{\,2}) = 0$$

und der Punkt $P(x_1, y_1)$. Wie liegen die Polaren des Punktes bezüglich der Hyperbeln des Büschels?

Durchmesser der Hyperbel.

447. Der Punkt $P(x_1, y_1)$ möge in unendlicher Ferne liegen. Welches ist die Gleichung der Polare desselben bezüglich der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$?

448. In welchem Verhältnis werden alle Sehnen, die nach dem unendlich fernen Pole konvergieren, durch die Polare desselben geteilt?

449. Welche Beziehung findet zwischen den Richtungskonstanten konjugierter Durchmesser der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ statt, von denen jeder die dem andern parallele Sehnenschar halbiert? Wie gestaltet sich das Resultat für eine gleichseitige Hyperbel?

450. Gegeben ist die Asymptotengleichung einer Hyperbel $xy = \frac{a^2+b^2}{4}$. Welcher Bedingung müssen die Konstanten der Gleichungen $y = A_1x$ und $y = A_2x$ genügen, wenn denselben konjugierte Durchmesser entsprechen sollen?

451. Der eine Durchmesser der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ möge mit der einen Asymptote der Kurve zusammenfallen. Welche Lage hat der konjugierte Durchmesser?

452. Es ist zu zeigen, daß die Paare konjugierter Durchmesser der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ ein involutorisches Strahlenbüschel bilden. Welches sind die Doppelstrahlen der Involution?

453. Welche Lage haben zwei konjugierte Durchmesser einer Hyperbel zu der Hauptachse der Kurve? Welcher Satz ergiebt sich für die Punkte, in denen eine Hyperbel von zwei konjugierten Durchmessern geschnitten wird?

454. Gegeben ist die Hyperbel $16y^2 - 25x^2 = -400$ und der Durchmesser $y = \frac{1}{3}x$. a) Welches ist die Gleichung des konjugierten Durchmessers? b) Welchen Winkel schließen beide Durchmesser mit einander ein?

455. In der Hyperbel $4y^2 - 49x^2 = -196$ ist durch den Punkt $x_1 = 5$, $y_1 = 3$ eine Sehne zu ziehen, welche in diesem Punkte halbiert wird. Welches ist die Gleichung der Sehne?

456. Es soll die Länge desjenigen Durchmessers der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ bestimmt werden, der dem Durchmesser $y = Mx$ konjugiert ist.

Beispiel. $4y^2 - 9x^2 = -36$, $y = 3x$.

457. Von der Hyperbel $16y^2 - 25x^2 = -400$ sind diejenigen Durchmesser zu bestimmen, welche einen Winkel von 45^0 mit einander einschließen.

458. An eine Hyperbel ist in einem gegebenen Punkte P eine Tangente zu legen. Wie ist die Konstruktion auszuführen?

459. An eine Hyperbel sind Tangenten in gegebener Richtung zu legen.

460. Welches ist der geometrische Ort der Endpunkte der Nebendurchmesser der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$?

461. Wie liegen die Asymptoten zweier konjugierten Hyperbeln zu einander?

462. Gegeben sind die beiden konjugierten Hyperbeln

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2 \quad \text{und} \quad a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2.$$

Von den Brennpunkten der ersten sind nach zwei entsprechenden Punkten der beiden Hyperbeln Leitstrahlen gezogen. Wie verhält sich die Summe der Leitstrahlen des ersten Punktes zur Summe der Leitstrahlen des zweiten?

463. Durch den einen Endpunkt eines Hauptdurchmessers $y = Mx$ der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ ist eine Tangente der letzteren gezogen. In welchem Verhältnis steht das von den Asymptoten begrenzte Stück derselben zu der Länge des konjugierten Nebendurchmessers?

464. Durch den Brennpunkt $(e, 0)$ der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ ist eine Sehne gezogen, welche gegen die Hauptachse unter dem Winkel φ geneigt ist. In welcher Beziehung steht dieselbe zu dem parallelen Durchmesser und zu der Hauptachse?

465. Von der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ sind zwei konjugierte Durchmesser $2a_1$ und $2b_1$ sowie der von ihnen eingeschlossene Winkel φ gegeben. In welcher Beziehung stehen die gegebenen Stücke zu den Achsen?

466. In welcher Beziehung stehen je zwei konjugierte Durchmesser einer gleichseitigen Hyperbel?

467. Von einer Hyperbel sind zwei konjugierte Durchmesser $2a_1 = 10$, $2b_1 = 14$ und der von diesen eingeschlossene Winkel $\varphi = 45^0$ gegeben. Wie groß sind die Achsen der Hyperbel?

468. Von einer Hyperbel sind zwei konjugierte Durchmesser der Größe und Lage nach gegeben. Die Asymptoten der Kurve sind durch Konstruktion zu finden.

469. Von einer Hyperbel sind zwei konjugierte Durchmesser der Länge und Lage nach gegeben. Die Hauptachse und die Nebenachse sollen durch Konstruktion gefunden werden.

470. Es mögen die Endpunkte von zwei konjugierten Durchmessern einer Hyperbel mit einander verbunden sein. Welches ist der Inhalt des von diesen Verbindungslinien gebildeten Parallelogramms?

471. An eine Hyperbel sei im Punkte P eine Tangente gelegt, welche die eine Asymptote im Punkte Q schneidet, ferner sei durch Q eine Parallele zu dem durch P gehenden Durchmesser gezogen und bis zum Schnitt mit dem konjugierten Durchmesser verlängert. Welches ist der Inhalt des so entstandenen Parallelogramms?

472. Gegeben ist die Gleichung einer Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$. Welche Gestalt erhält dieselbe, wenn zwei konjugierte Durchmesser $2a_1$ und $2b_1$ als Koordinatenachsen angenommen werden?

473. Die Gleichung einer Hyperbel ist $a_1{}^2y^2 - b_1{}^2x^2 = -a_1{}^2b_1{}^2$, wenn zwei konjugierte Durchmesser als Koordinatenachsen angenommen sind. Welchen Gleichungen entsprechen in diesem Falle die Asymptoten der Hyperbel?

474. In einer gegebenen Hyperbel ist eine Sehne s gezogen. Man verlängere dieselbe nach beiden Seiten bis zum Schnitt mit den Asymptoten. In welcher Beziehung stehen die beiden Verlängerungen zu einander?

475. Von dem Punkte P einer Asymptote einer gegebenen Hyperbel ist eine Sekante in die Kurve gezogen. Wie groß ist das Rechteck aus der ganzen Sekante und ihrem äußeren Abschnitte?

476. Wie lassen sich die unter No. 289—292 für die Ellipse gestellten Aufgaben für die Hyperbel lösen? Wie gestalten sich die Resultate für diesen Fall?

Die Hyperbel als geometrischer Ort.

477. Durch den Punkt $P\,(x_1 = -4,\ y_1 = 7)$ ist ein Strahl gezogen, der die beiden Koordinatenachsen schneidet. Das Stück desselben zwischen den Achsen sei im Punkte Q halbiert. Welche Kurve beschreibt der Punkt Q, wenn der Strahl um P gedreht wird?

478. Gegeben sind zwei Gerade g_1 und g_2. Es soll der geometrische Ort des Punktes bestimmt werden, von dem Paral-

lelen zu diesen Geraden gezogen mit ihnen ein Parallelogramm von konstantem Inhalt bilden.

479. Es soll der geometrische Ort eines Punktes P gefunden werden, dessen Verbindungslinie mit dem Punkte A ($x_1 = 1$, $y_1 = 1$) durch die Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ im Verhältnis $2:1$ geteilt wird.

480. Durch den Punkt $P(x_1, y_1)$ sind Sehnen in die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ gezogen. Auf welcher Kurve liegen die Halbierungspunkte derselben?

481. Die Grundlinie c eines Dreiecks liegt auf dem positiven Teile der Abscissenachse, der eine Endpunkt derselben im Koordinatenanfangspunkte. Welches ist der Ort der gegenüberliegenden Spitze, wenn das Produkt der Tangenten der Winkel an der Grundlinie $\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\beta = -k$ ist?

482. Es soll der geometrische Ort der Spitze eines Dreiecks bestimmt werden, dessen Grundlinie mit dem positiven Teile der X-Achse zusammenfällt und die Endpunkte $(0, 0)$ und $(10, 0)$ besitzt, wenn die Winkel an der Grundlinie der Relation $\operatorname{tg}\alpha = 2\cot\alpha + \cot\beta$ genügen.

483. Die Grundlinie eines Dreiecks hat die Koordinaten $(0, 0)$ und $(c, 0)$. Welches ist der geometrische Ort der gegenüberliegenden Spitze, wenn der eine Winkel an der Grundlinie doppelt so groß als der andere ist?

484. Längs der Parabel $y^2 = px$ gleiten zwei Tangenten fort, welche den konstanten Winkel ϑ einschließen. Welche Linie beschreibt der Schnittpunkt der Tangenten? Wie gestaltet sich das Resultat a) für $\vartheta = 45^0$, b) für $\vartheta = 90^0$?

485. Längs der Parabel $y^2 = px$ gleiten zwei Tangenten fort. Welche Linie beschreibt der Schnittpunkt derselben, wenn die Differenz der Tangenten ihrer Neigungswinkel zur X-Achse gleich der Größe k ist?

486. Die Seite $AB = c$ des Dreiecks ABC fällt mit dem positiven Teile der X-Achse, der Punkt A mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammen. Welches ist der geometrische Ort des Mittelpunktes des einbeschriebenen Kreises, wenn die Seite a und der Winkel B konstant, die übrigen Stücke des Dreiecks veränderlich sind?

487. Von einem Dreieck ABC ist die Seite c und die Differenz der beiden andern Seiten $a - b = d$ konstant. Welches ist der geometrische Ort des Schwerpunktes?

488. Die Seite c des Dreiecks ABC fällt mit dem positiven Teile der Abscissenachse, der eine Endpunkt derselben mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammen. Die Spitze C gleitet auf der Parabel $\eta + n\xi^2 - m\xi = 0$ fort. Welche Kurve beschreibt der Höhenpunkt des Dreiecks? Welche Gestalt nimmt das Resultat an, wenn der Scheitel der Leitparabel in den Koordinatenanfangspunkt verlegt wird?

489. Über der Hauptachse der Hyperbel $\eta^2 = \frac{b^2}{a^2}(\xi^2 - 2a\xi)$ als Grundlinie ist ein Dreieck konstruiert, dessen Spitze auf der Hyperbel fortrückt. Welches ist der geometrische Ort des Höhenpunktes?

490. Über der Hauptachse der Hyperbel $\eta^2 = \frac{b^2}{a^2}(\xi^2 - 2a\xi)$ als Grundlinie ist ein Dreieck konstruiert, dessen Spitze auf der Hyperbel fortgleitet. Auf welcher Linie bewegt sich gleichzeitig der Schwerpunkt des Dreiecks fort?

491. Gegeben ist ein Kreis K und ein Punkt P außerhalb desselben. Auf welcher Kurve liegen die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch den Punkt P gehen und den Kreis K einschließend oder ausschließend berühren?

492. Gegeben sind zwei Kreise $x^2 + y^2 = r_1^2$ und $(x-a)^2 + y^2 = r_2^2$, welche vollständig getrennt liegen. 1. Es soll der geometrische Ort des Mittelpunktes desjenigen Kreises gesucht werden, der die gegebenen Kreise entweder beide ausschließend oder beide einschließend berührt. 2. Es soll der geometrische Ort des Mittelpunktes desjenigen Kreises gesucht werden, der den einen der gegebenen Kreise einschließend, den andern ausschließend berührt. Wie gestaltet sich im ersten Falle das Resultat, wenn die Radien der beiden gegebenen Kreise gleich sind?

493. Gegeben ist der Kreis $y^2 = 2rx - x^2$, welcher von der X-Achse in dem Durchmesser AB geschnitten wird. Durch den Koordinatenanfangspunkt A ist eine Sehne AC gezogen, welche eine zu AB parallele Tangente des Kreises in K schneidet. Das von K auf die X-Achse gefällte Lot trifft eine durch den Mittelpunkt zu AC gezogene Parallele in P. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P, wenn AC um A gedreht wird? Es

sind zwei Fälle zu unterscheiden, da die Gleichung der Tangente entweder $y = +r$ oder $y = -r$ sein kann.

494. Gegeben ist der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$. Durch die Punkte $(+r, 0)$ und $(-r, 0)$ sind zwei Sehnen in den Kreis gezogen, so daß die Verbindungslinie der Endpunkte derselben lotrecht zur X-Achse steht. Die Verlängerungen der Sehnen schneiden sich im Punkte P. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P?

495. Die Tangenten des Kreises $y^2 + x^2 = r^2$ mögen als Polaren bezüglich der Parabel $y^2 = px$ betrachtet werden. Welches ist die Gleichung der Kurve, auf der die zugehörigen Pole liegen?

496. Ein Büschel von Parabeln entspricht der Gleichung

$$y^2 - px - k^2 = 0,$$

in der p ein variabelèr Parameter, dagegen k eine Konstante ist. Die Gerade $Lx + My + N = 0$ möge als Polare der Parabeln des Büschels betrachtet werden. Auf welcher Kurve liegen die zugehörigen Pole?

497. Gegeben sind zwei Kreise

$$(x - a)^2 + y^2 = r_1^2 \text{ und } x^2 + y^2 = r_2^2.$$

Von dem Punkte P sind Tangenten an diese Kreise gezogen. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P, wenn die Differenz der Tangenten gleich d sein soll? $(a > d.)$

498. Gegeben ist der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ und die Gerade $x = a$. Auf jedem Radius ist der dem Schnittpunkte mit dem Kreise zugeordnete harmonische Punkt zu bestimmen, wenn die beiden andern zugeordneten Punkte der Mittelpunkt und der Schnittpunkt des Radius und der Geraden sind. Auf welcher Kurve liegen die vierten harmonischen Punkte?

Konstruktionsaufgaben.

499. Gegeben sind die beiden Brennpunkte F_1 und F_2 und ein Punkt P einer Hyperbel. Die Scheitel der Kurve sind durch Konstruktion zu finden.

500. Die Lage der beiden Brennpunkte F_1 und F_2 und die Lage einer Tangente t sind bekannt. Es sollen die Achsen der Hyperbel gefunden werden.

501. Von einer Hyperbel kennt man die Richtung der Hauptachse, sowie den Brennpunkt F_1 und die Tangente t mit ihrem

Berührungspunkte P. Der zweite Brennpunkt, die Scheitel und die Asymptoten sind zu bestimmen.

502. Bekannt ist die Lage eines Brennpunktes F_1, die Lage einer Asymptote a_1 und die Größe der Hauptachse $2a$. Man soll die Lage des zweiten Brennpunktes, die Lage der Scheitel und die Richtung der zweiten Asymptote finden.

503. Man kennt den Winkel der beiden Asymptoten und den Abstand der beiden Brennpunkte einer Hyperbel. Wo liegen die Scheitel der Kurve?

504. Von einer Hyperbel kennt man die Lage eines Brennpunktes F_1 und die Lagen der drei Tangenten t_1, t_2, t_3. Man soll die Lage des zweiten Brennpunktes sowie die Lagen und Längen der Achsen finden.

505. Von einer gegebenen Hyperbel sollen die Achsen, die Scheitel, die Brennpunkte und die Asymptoten gefunden werden.

506. Gegeben sind die Richtungen der beiden Asymptoten einer Hyperbel sowie die Grösse der Hauptachse. Die Lage der beiden Brennpunkte sowie die Länge der imaginären Achse sind zu finden.

507. Es sollen die Brennpunkte einer Hyperbel gefunden werden, wenn die Hauptachse der Lage und Größe nach sowie ein Punkt P der Hyperbel gegeben sind.

508. Gegeben ist die Hauptachse $2a$ der Lage und Größe nach sowie die Lage einer Tangente t. Zu bestimmen sind die Brennpunkte und die Asymptoten.

509. Von einer Hyperbel sind die beiden Asymptoten und ein Punkt P der Kurve gegeben. Wie findet man die Brennpunkte und die Scheitel?

510. Es soll eine Hyperbel konstruiert werden, von der die beiden Asymptoten a_1 und a_2 sowie die Tangente t gegeben sind.

511. Von einer Hyperbel sind die beiden Asymptoten a_1 und a_2 und ein Durchmesser d_1 gegeben. Wie findet man die Richtung desjenigen Durchmessers, der d_1 konjugiert ist?

512. Bekannt ist der Asymptotenwinkel und die Differenz der Achsen einer Hyperbel. Wie lassen sich die Scheitelpunkte und die Brennpunkte finden?

513. Gegeben ist die Lage einer Asymptote a_1, die Richtung einer Tangente t_1, der Berührungspunkt derselben P_1 und

endlich ein zweiter Punkt P_2 der Hyperbel. Wie läßt sich die Kurve konstruieren?

514. Von einer Hyperbel kennt man die Lage des Mittelpunktes 0, die Richtung einer Asymptote, die Lage einer Tangente und das Verhältnis der Achsen. Die Kurve ist zu konstruieren.

515. Zur Konstruktion einer Hyperbel sind zwei Punkte derselben P_1 und P_2, der Mittelpunkt 0 und die Lage einer Asymptote a_1 gegeben.

516. Man kennt von einer Hyperbel die Lage der einen Asymptote a_1, sowie die drei Punkte der Kurve P_1, P_2, P_3. Wie läßt sich die Konstruktion der Hyperbel ausführen?

517. Gegeben sind die beiden Scheiteltangenten t_1 und t_2, der Berührungspunkt der letzteren S und eine dritte Tangente t_3. Wie findet man die Brennpunkte der Hyperbel?

Flächeninhalt der Hyperbel.

518. Gegeben ist die gleichseitige Hyperbel $xy = a^2$ und auf derselben die beiden Punkte $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$. Wie groß ist der Inhalt desjenigen Flächenstückes, welches von der Abscissenachse, den beiden Ordinaten y_1, y_2 und dem zwischen beiden liegenden Bogen der Hyperbel begrenzt wird?

Beispiel. $xy = 9$; $x_1 = 4$, $x_2 = 25$.

519. Die Asymptotengleichung einer Hyperbel ist $xy = \frac{a^2 + b^2}{4}$. Auf der Kurve liegen die Punkte $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$. Es soll der Inhalt des Flächenstückes berechnet werden, welches von der X-Achse, den beiden Ordinaten y_1 und y_2 und dem zwischen diesen beiden liegenden Bogen begrenzt wird.

Beispiel. $xy = 61$, $\alpha = 120^0$, $x_1 = 10$, $x_2 = 17$.

520. Gegeben sind auf einer Hyperbel die beiden Punkte P_1 und P_2, welche durch die beiden Geraden OP_1 und OP_2 mit dem Mittelpunkte verbunden sind. Wie groß ist der Inhalt des Sektors, welcher von diesen beiden Strahlen und dem Bogen $P_1 P_2$ begrenzt wird?

521. Eine Hyperbel wird durch zwei parallele Gerade in den Punkten P_1, P_2 und Q_1, Q_2 geschnitten. In welcher Beziehung stehen die beiden Sektoren OP_1Q_1 und OP_2Q_2?

522. Die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ wird durch die Gerade $x = d$ in den Punkten P_1 und P_2 geschnitten. Man verbindet P_1 und P_2 mit dem Koordinatenanfangspunkte 0. Wie groß ist der Inhalt des Sektors OP_1P_2?

Beispiel. $25y^2 - 9x^2 = -225$, $x = 13$.

523. Durch die Gerade $x = d$ wird von der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ ein Segment abgeschnitten. Wie groß ist der Inhalt desselben?

Beispiel. $7x^2 - 3y^2 = 148$, $x = 5$.

524. Die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ wird von den beiden Geraden $y = +f$ und $y = -f$ geschnitten. Wie groß ist der Inhalt der Figur, welche von diesen beiden Geraden und den dazwischen liegenden Bogen der Hyperbel begrenzt wird?

525. An den Hauptkreis der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ sind zwei Tangenten gelegt, welche der Hauptachse parallel laufen. Wie groß sind die vier Flächenstücke, von denen jedes durch einen Quadranten des Kreises, einen Bogen der Hyperbel und eine Tangente begrenzt wird?

Die Kurven zweiten Grades.

Die allgemeine Gleichung zweiten Grades.

526. Gegeben ist die Gleichung zweiten Grades

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

welche nach y entwickelt die Gestalt

$$y = \frac{-Bx - E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{(B^2 - AC)x^2 + 2(BE - CD)x + E^2 - CF}$$

annimmt. Es möge die Diskriminante der Form unter dem Wurzelzeichen

$$(BE - CD)^2 - (B^2 - AC)(E^2 - CF) \text{ oder}$$

$$-C\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

kurz mit Δ bezeichnet werden. Welche Kurve entspricht der gegebenen Gleichung, wenn

$$1.\ \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0 \text{ und}$$

$$\alpha) -\frac{\Delta}{C} \gtrless 0 \text{ und } A \text{ oder } C \gtrless 0,\ \beta) -\frac{\Delta}{C} = 0,\ \gamma) -\frac{\Delta}{C} \gtrless 0 \text{ und } A \text{ oder } C \lesseqgtr 0;$$

wenn

$$2.\ \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0 \text{ und}$$

$$\alpha)\ -\frac{\Delta}{C} > 0,\quad \beta)\ -\frac{\Delta}{C} = 0,\quad \gamma)\ -\frac{\Delta}{C} < 0;$$

wenn endlich

$$3.\ \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} < 0 \text{ und}$$

$$\alpha)\ -\frac{\Delta}{C} > 0,\quad \beta)\ -\frac{\Delta}{C} = 0,\quad \gamma)\ -\frac{\Delta}{C} < 0 \text{ ist?}$$

527. Es sollen die Kurven bestimmt werden, welche den folgenden Gleichungen entsprechen:

a) $3x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y + 5 = 0$;
b) $x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$;
c) $2x^2 - 5xy - 3y^2 + 9x - 13y + 10 = 0$;
d) $4x^2 + 2xy - y^2 + 6x + 2y + 3 = 0$;
e) $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 24x + 16y - 9 = 0$;
f) $9x^2 - 6xy + y^2 + 4x + 3y + 10 = 0$;
g) $25x^2 + 40xy + 16y^2 + 70x + 56y + 49 = 0$;
h) $13x^2 + 14xy + 5y^2 + 14x + 10y + 5 = 0$;
i) $3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$;
k) $10xy - 2y^2 + 6x + 4y - 21 = 0$;
l) $3x^2 - 4xy + 5y^2 - 30x - 16y - 20 = 0$;
m) $3x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 10y + 14 = 0$;
n) $4x^2 + 9y^2 - 8x + 54y + 85 = 0$;
o) $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$.

528. Gegeben ist die Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Es sollen die geometrischen Örter der Halbierungspunkte derjenigen Sehnen bestimmt werden, welche a) der Y-Achse b) der X-Achse parallel laufen.

Beispiele. 1. $x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$;
2. $3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$.

529. Wie gestaltet sich das Resultat der vorhergehenden Aufgabe, wenn der Gleichung zweiten Grades eine Parabel entspricht?

Beispiel. $9x^2 - 6xy + y^2 + 4x + 3y + 10 = 0$.

530. Gegeben ist die Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Es sollen die Koordinaten des Mittelpunktes derjenigen Kurve bestimmt werden, welche der Gleichung entspricht.

Beispiele. 1. $x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$;
2. $3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$;
3. $9x^2 - 6xy + y^2 + 4x + 3y + 10 = 0$.

531. Welche Bedingung muß erfüllt sein, wenn die Kurve, welche der Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

entspricht, durch den Koordinatenanfangspunkt gehen soll?

532. Es sollen die Bedingungen bestimmt werden, welchen die Konstanten der Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

genügen müssen, wenn die entsprechende Kurve von einer der Koordinatenachsen berührt werden soll.

533. Gegeben ist die Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Durch den Punkt (a, b) sind Parallelen zu den Koordinatenachsen gezogen. Welche Gestalt nimmt die gegebene Gleichung an, wenn man diese letzteren Geraden als Koordinatenachsen betrachtet?

534. Durch den Mittelpunkt der Linie zweiten Grades, welche der Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

entspricht, sind Parallelen zu den Achsen gezogen. Welche Form nimmt die Gleichung an, wenn die letzteren als Koordinatenachsen betrachtet werden?

Beispiele. 1. $x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$;
2. $3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$;
3. $3x^2 - 4xy + 5y^2 - 30x - 16y - 20 = 0$.

535. Welche Gestalt würde das Resultat der vorhergehenden Aufgabe annehmen, wenn der gegebenen Gleichung eine Parabel entspräche?

536. Gegeben ist die Mittelpunktsgleichung einer Kurve zweiten Grades

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + K = 0.$$

Es soll das Koordinatensystem so gedreht werden, daß der Koeffizient des Produktes der Variabeln verschwindet. Wie groß ist der Drehungswinkel? Welche Gestalt nimmt die Gleichung an? Wie verhält sich die Konstante K bei der Drehung?

Beispiele. 1. $10x^2 - 6xy + 7y^2 = 30;$
2. $9x^2 + 16xy - 20y^2 = 60.$

537. Der Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

möge eine Parabel entsprechen. Das rechtwinklige Koordinatensystem soll so gedreht werden, daß die X-Achse der Achse der Parabel parallel läuft. Wie groß ist der Drehungswinkel? Welche Gestalt nimmt die Gleichung an?

Beispiel. $9x^2 - 6xy + y^2 + 4x + 3y + 10 = 0.$

538. Wie groß sind die Achsen der Linie zweiten Grades, welche der Gleichung

$$3x^2 - 4xy + 5y^2 - 30x - 16y - 20 = 0$$

entspricht?

539. Es sollen die Achsen der Kurve bestimmt werden, deren Gleichung

$$4x^2 + 2xy - y^2 + 6x + 2y + 3 = 0$$

ist.

540. Gegeben ist die Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Es soll die lineare Excentricität der Kurve gesucht werden, welche dieser Gleichung entspricht.

Beispiel. $x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0.$

541. Wie groß ist der Parameter der Parabel

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 + 6x + 10y + 3 = 0?$$

542. Durch den Koordinatenanfangspunkt seien zwei neue Achsen gelegt, von denen die Abscissenachse unter dem Winkel α, die Ordinatenachse unter dem Winkel β gegen die ursprüngliche X-Achse geneigt sein möge. Wie lautet die Gleichung einer Linie zweiten Grades, wenn dieselbe auf dieses neue Achsensystem bezogen wird?

543. Durch wieviele Punkte ist die Lage einer Linie zweiten Grades bestimmt? Wie lautet die Gleichung dieser Linie, wenn die nötige Anzahl von Punkten gegeben ist?

544. Wie gestaltet sich das Resultat der vorhergehenden Aufgabe, wenn drei von den gegebenen Punkten z. B. die drei letzten in einer geraden Linie liegen?

545. Durch wieviele Punkte ist die Lage einer Parabel vollständig bestimmt?

546. Ein Punkt geht von dem Koordinatenanfangspunkte aus und durchläuft eine Linie zweiten Grades. Dabei gelangt er zu den Punkten $x_1 = 2$, $y_1 = 2$; $x_2 = 18$, $y_2 = 6$; $x_3 = 32$, $y_3 = 8$; $x_4 = 72$, $y_4 = 12$. Welches ist die Gleichung der Kurve?

547. Welche Linie zweiten Grades läßt sich durch die Punkte $x_1 = 3$, $y_1 = 7$; $x_2 = -2$, $y_2 = -8$; $x_3 = 11$, $y_3 = 31$; $x_4 = 9$, $y_4 = -2$; $x_5 = 17$, $y_5 = 1$ legen?

548. Gegeben sind fünf Punkte:

$$x_1 = 1, \ y_1 = 2; \ x_2 = 0, \ y_2 = 1; \ x_3 = \tfrac{1}{4}, \ y_3 = \frac{5 + \sqrt{3}}{4};$$

$$x_4 = \tfrac{1}{2}, \ y_4 = 2; \ x_5 = \tfrac{7}{8}, \ y_5 = \frac{15 - \sqrt{7}}{8}.$$

Es soll die Linie zweiten Grades bestimmt werden, welche durch diese Punkte hindurchgeht.

549. Man soll die Linie zweiten Grades bestimmen, auf welcher die fünf Punkte

$$x_1 = -8, \ y_1 = 0; \ x_2 = 3, \ y_2 = \sqrt{\tfrac{11}{12}}; \ x_3 = 4, \ y_3 = -\frac{2}{\sqrt{3}};$$

$$x_4 = 1, \ y_4 = -\tfrac{1}{2}; \ x_5 = 6, \ y_5 = \sqrt{\tfrac{7}{3}}$$

liegen.

550. Es soll die Gleichung einer Parabel gefunden werden, welche die X-Achse in dem Punkte (4, 0), die Y-Achse in dem Punkte (0, 3) berührt.

551. Wie heißt die Gleichung einer Parabel, welche die positiven Teile der Koordinatenachsen berührt und durch die Punkte

$$x_1 = \frac{28 + 8\sqrt{6}}{3}, \ y_1 = 1; \ x_2 = 1, \ y_2 = \frac{27 - 12\sqrt{2}}{4}$$

geht?

552. Es soll eine Linie zweiten Grades gefunden werden, welche von den beiden Koordinatenachsen berührt wird und zwar

von der Y-Achse im Punkte (0, 4), außerdem aber durch die beiden Punkte

$$x_1 = \tfrac{16}{3}, \quad y_1 = -\tfrac{20}{3};$$
$$x_2 = -3, \quad y_2 = 10 + \tfrac{5}{2}\sqrt{15}$$

geht.

Geometrische Örter.

553. Zwischen den Schenkeln eines Winkels α bewegt sich eine Linie von konstanter Länge q. Welche Kurve beschreibt ein Punkt P derselben?

554. Die konstante Grundlinie c eines Dreiecks liegt fest, ebenso der Punkt Q, in welchem dieselbe von dem anbeschriebenen Kreise berührt wird. Welches ist der geometrische Ort der gegenüberliegenden Spitze C?

555. Auf der Y-Achse liegt der Punkt $P(0, y_1)$. Durch ihn ist ein Strahl gezogen, welcher die X-Achse und die Gerade g ($y = Mx$) schneidet. Welches ist der geometrische Ort des Halbierungspunktes desjenigen Abschnittes, der zwischen der Geraden g und der X-Achse liegt?

556. Gegeben ist die Gerade g, welche der Gleichung $y = x$ entspricht. Auf welcher Kurve liegt der Punkt P, wenn die Summe der Quadrate seiner Abstände von der Geraden g und der Y-Achse gleich k^2 sein soll?

557. Gegeben sind zwei sich schneidende Gerade $y = Mx$ und $y = 0$. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P, für den die Differenz der Quadrate der Entfernungen von den beiden Geraden gleich d^2 ist?

558. Gegeben sind zwei sich schneidende Gerade $y = Mx$ und $y = 0$. Von einem Punkte P sind auf beide Gerade Lote gefällt, so daß das Rechteck aus denselben gleich q^2 ist. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P?

559. Von einem Dreieck liegt die Grundlinie c fest und die Differenz der Winkel an derselben hat einen konstanten Wert. Welches ist der geometrische Ort der Spitze dieses Dreiecks?

560. Die Seite AB des Dreiecks ABC falle mit dem positiven Teile der X-Achse, der Eckpunkt A mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammen. Auf welcher Linie bewegt sich der Schwerpunkt des Dreiecks, wenn die Seite a und der Winkel A konstant, die übrigen Stücke veränderlich sind?

561. In einem Dreieck ABC sei die Seite b und der Winkel B konstant, die übrigen Stücke veränderlich. Welches ist der geometrische Ort des fünften merkwürdigen Punktes? Welche Gestalt nimmt das Resultat an, wenn der Winkel B gleich 90^0 ist? Die Lage des Dreiecks sei dieselbe wie in Aufgabe 560.

562. Gegeben ist das Dreieck ABC. Welches ist der geometrische Ort des fünften merkwürdigen Punktes, wenn die Seite b und der Winkel A konstant, die übrigen Stücke veränderlich sind? Über die Lage des Dreiecks siehe Aufgabe 560.

563. Welche Linie beschreibt der Höhenpunkt des Dreiecks ABC, wenn die Grundlinie c konstant ist und die in Aufgabe 560 angegebene Lage hat, die gegenüberliegende Spitze C aber auf der Geraden $y = Mx + n$ fortrückt?

564. Jede Abscisse des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ sei um das n-fache der zugehörigen Ordinate vergrößert. Welches ist der geometrische Ort der Endpunkte der Ordinaten?

565. Gegeben ist die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. Auf welcher Linie liegen die Halbierungspunkte aller derjenigen Sehnen, welche durch den Punkt (x_1, y_1) gehen?

566. Gegeben ist ein Kreis, dessen Gleichung $y^2 = 2rx - x^2$ ist. Der Durchmesser AG desselben läuft der Y-Achse parallel. Durch A ist ein Strahl S gezogen, welcher die Peripherie in H, die Y-Achse in D schneidet. Verbindet man den Mittelpunkt M des Kreises mit D, zieht man ferner die Gerade HG, so schneiden sich diese Linien in P. Welche Linie beschreibt der Punkt P, wenn der Strahl S um A gedreht wird?

567. Gegeben ist der Punkt $A(0, y_1)$ und der Punkt $D(x_2, y_2)$. Ein Strahl durch A gezogen schneidet die X-Achse in B. Man verbindet B mit D und errichtet auf dieser Verbindungslinie in D ein Lot, welches den Strahl AB in P trifft. Welche Linie beschreibt der Punkt P, wenn der Strahl AB um A gedreht wird?

Beispiel. $y_1 = 5$; $x_2 = 3$, $y_2 = 1$.

568. Gegeben sind drei Punkte $A(0, y_1)$, $B(x_2, 0)$, $C(x_3, y_3)$ und die Gerade g, deren Gleichung $x - a = 0$ ist. Durch A sei ein Strahl S gezogen, der die X-Achse in K, die Gerade g in F schneiden möge, ferner sei B mit F und C mit K verbunden.

Welche Linie beschreibt der Schnittpunkt P dieser beiden Verbindungslinien, wenn der Strahl S um A gedreht wird?

Beispiel. $y_1 = 4$; $x_2 = 3$; $x_3 = 8$, $y_3 = 5$;
$a = 5$.

569. Gegeben sind die Geraden

$$(G)\ \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1, \quad (G_1)\ y - 2x + 10 = 0.$$

Durch den festen Punkt $(8, 6)$ der letzteren Geraden geht ein Strahl, der G in C schneidet. Zieht man durch C eine Parallele zur X-Achse, die G_1 in D trifft, und verbindet D mit dem Punkte $(0, 3)$, so schneidet diese letztere Linie den durch A gehenden Strahl in P. Welches ist der geometrische Ort von P, wenn der Strahl um A gedreht wird?

570. Auf der Geraden $y = b$ liegt der feste Punkt $K(a, b)$. K sei mit dem Koordinatenanfangspunkte verbunden, und eine Parallele zu dieser Verbindungslinie schneide die Y-Achse in T, die Gerade $(y = b)$ in L. Man verbinde den Punkt $M(-a, 0)$ mit L, ferner den Punkt $N(a, 0)$ mit F_1, und bezeichne den Schnittpunkt dieser Verbindungslinien mit P. Es soll der geometrische Ort des Punktes P gesucht werden.

571. Gegeben ist der Kreis $y^2 + x^2 = r^2$ und die Tangente $y = r$ desselben. Von zwei Punkten der letztern, welche um die Strecke a von einander entfernt sind, sind zwei Tangenten an den Kreis gelegt. Der Schnittpunkt dieser beiden Tangenten ist P. Es soll der geometrische Ort des Punktes P gefunden werden.

Die Kurven zweiten Grades und die gerade Linie; Enveloppen.

572. Gegeben sind eine Kurve zweiten Grades

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

und eine Gerade $y = Mx + n$. Wann werden die Schnittpunkte dieser beiden Gebilde getrennt und reell sein? Wann fallen sie zusammen? Wann sind sie imaginär? Welcher Ordnung gehört die Kurve zweiten Grades an?

573. In welchen Punkten wird die Linie zweiter Ordnung

$$x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$$

von der Geraden $y + 2x + 3 = 0$ geschnitten?

574. Es sollen die Punkte bestimmt werden, in denen die Linie zweiter Ordnung

$$9x^2 - 6xy + y^2 + 4x + 3y + 10 = 0$$

von der Geraden $y + 2x + 2 = 0$ geschnitten wird.

575. Gegeben sind zwei Geradenpaare $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ und $L'_1 = 0$, $L'_2 = 0$. Durch die Punkte, in welchen das erste Paar von dem zweiten geschnitten wird, ist eine Linie zweiter Ordnung zu legen. Welches ist die Gleichung derselben?

576. Die Koordinatenachsen werden von den beiden Geraden

$$\frac{x}{p_1} + \frac{y}{q_1} = 1, \quad \frac{x}{p_2} + \frac{y}{q_2} = 1$$

in vier Punkten geschnitten. Es soll die Gleichung eines Kegelschnitts bestimmt werden, der durch die Punkte hindurch geht. Für welchen Wert des Parameters k ist der Kegelschnitt eine Parabel?

577. Die beiden Geraden

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1, \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{1} = 1$$

werden von den Geraden

$$y = 2x - 5, \quad y = x + 6$$

in vier Punkten geschnitten. Es ist durch die Schnittpunkte ein Kegelschnitt zu legen, welcher zugleich durch den Koordinatenanfangspunkt geht. Welches ist die Gleichung der Kurve?

578. Die beiden Geraden

$$2y - x = 0, \quad y - 2x = 0$$

werden von dem Geradenpaare

$$x + 2y - 2 = 0, \quad 2x + 5y - 6 = 0$$

geschnitten. Es soll die Gleichung des Kegelschnittes bestimmt werden, der durch die vier Schnittpunkte und durch den Punkt $x_1 = 6$, $y_1 = 1$ geht.

579. Die beiden Geraden

$$3y - x = 0, \quad 2y - 3x = 0$$

werden von dem Geradenpaare

$$x + y - 1 = 0, \quad 2x + 3y - 6 = 0$$

in vier Punkten geschnitten. Es soll durch die Schnittpunkte ein Kegelschnitt gelegt werden, welcher von der X-Achse berührt wird.

580. Durch die Punkte, in welchen das Geradenpaar

$$2y - x = 0, \quad y - 2x = 0$$

von den beiden Geraden

$$x + 2y - 2 = 0, \quad 2x + 5y - 6 = 0$$

geschnitten wird, ist ein Kegelschnitt zu legen, dessen Mittelpunkt sich auf der Y-Achse befindet. Welches ist die Gleichung desselben?

581. Von einem Punkte P sind zwei Sekanten in einen Kegelschnitt gezogen. Wie verhalten sich die Rechtecke, von denen jedes aus den Abschnitten einer Sekante gebildet wird? Welches Resultat ergiebt sich, wenn die Sekanten so verschoben werden, daß sie ihren ursprünglichen Richtungen parallel bleiben?

582. Wie gestaltet sich das Resultat der vorhergehenden Aufgabe, wenn die Linie zweiter Ordnung eine Parabel ist und die eine Sekante der Achse der Parabel parallel läuft?

583. Gegeben ist die Gleichung einer Linie zweiter Ordnung in Punktkoordinaten

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Welches ist die Gleichung dieser Kurve in Linienkoordinaten?

584. Gegeben ist eine Gleichung zweiten Grades

$$A_1 u^2 + 2B_1 uv + C_1 v^2 + 2D_1 u + 2E_1 v + F_1 = 0,$$

in der u und v Linienkoordinaten sind. Wann entspricht dieser Gleichung eine Ellipse, wann eine Parabel, wann eine Hyperbel?

585. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, wenn der Gleichung

$$A_1 u^2 + 2B_1 uv + C_1 v^2 + 2D_1 u + 2E_1 v + F_1 = 0$$

zwei Punkte entsprechen sollen?

586. Unter welchen Bedingungen entspricht der Gleichung

$$A_1 u^2 + 2B_1 uv + C_1 v^2 + 2D_1 u + 2E_1 v + F_1 = 0$$

ein einziger Punkt?

587. Welches Gebilde entspricht der Gleichung

$$21u^2 + 17uv + 2v^2 + 10u + 3v + 1 = 0?$$

588. Bestimme das Gebilde, dessen Gleichung

$$25u^2 + 30uv + 9v^2 + 10u + 6v + 1 = 0$$

ist.

589. Die Seiten eines Dreiecks entsprechen den Gleichungen

$$y = 0, \quad y - x = 0, \quad 2y + x - 10 = 0.$$

Von einem Punkte P der Grundlinie $y = 0$ sind Lote auf die beiden andern Seiten gefällt, und die Fußpunkte der Lote durch eine Gerade verbunden. Welches ist die Enveloppe der Verbindungslinien, welche man erhält, wenn der Punkt P längs der Grundlinie fortrückt?

590. Gegeben sind die beiden Geraden $2y - x = 0$, $y - 3x = 0$ und der Punkt P, dessen Koordinaten $x_1 = 10$, $y_1 = 10$ sind. Im Punkte P liegt der Scheitel eines rechten Winkels, dessen Schenkel die gegebenen Geraden in den Punkten Q und R schneiden, so dass PQR ein rechtwinkliges Dreieck ist. Welche Kurve hüllt die Hypotenusen der rechtwinkligen Dreiecke ein, die man erhält, wenn der rechte Winkel um P gedreht wird?

591. Gegeben ist ein Kreisbüschel, welches der Gleichung

$$y^2 + x^2 - 2kx - \delta^2 = 0$$

entspricht. Durch den Punkt $(0, \delta)$ ist die Sekante $y + x - \delta = 0$ gezogen, und in den Punkten, wo dieselbe die Kreise schneidet, sind Tangenten an die letzteren gelegt. Welche Kurve hüllt diese Tangenten ein?

592. Von dem Punkte $P(k, 0)$ sind Sekanten in den Kreis, $y^2 + x^2 = r^2$ gezogen, und auf jeder dieser Sekanten in den Punkten, in welchen sie von dem Kreise geschnitten wird, Lote errichtet. Von welcher Kurve werden diese Lote eingehüllt? Wie gestaltet sich das Resultat, wenn $k \gtreqless r$ gesetzt wird?

593. Gegeben ist ein System konfokaler Kegelschnitte, welches der Gleichung $a^2 y^2 + (a^2 - e^2) x^2 = a^2 (a^2 - e^2)$ entspricht, und der Punkt $P(x_1, y_1)$. Welche Kurve hüllt die Polaren des Punktes P bezüglich der Kurven des Systems ein?

594. Ein System konfokaler Kegelschnitte, welches der Gleichung $a^2 y^2 + (a^2 - 4) x^2 = a^2 (a^2 - 4)$ entspricht, wird von der Geraden $y = x - 2$ geschnitten. An jede Kurve seien in den Schnittpunkten Tangenten gelegt. Es soll die Kurve bestimmt werden, welche diese Tangenten einhüllt.

595. Durch den Koordinatenanfangspunkt sind Gerade zu ziehen, welche den Kegelschnitt

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

in unendlich fernen Punkten schneiden. Welches sind die Gleichungen derselben?

596. Welches Resultat ergiebt sich nach der Lösung der vorhergehenden Aufgabe für die unendlich fernen Punkte der einzelnen Kegelschnitte?

597. In welchem Verhältnis wird die Verbindungslinie der beiden Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ durch den Kegelschnitt

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

geteilt?

Tangenten und Asymptoten der Kurven zweiten Grades.

598. Gegeben ist der Kegelschnitt

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

und auf demselben der Punkt $P(x_1, y_1)$. Welches ist die Gleichung der Tangente des Kegelschnittes in diesem Punkte?

Beispiel. $4x^2 + 2xy - y^2 - 4x - 8y - 11 = 0$; $x_1 = 2$, $y_1 = -3$.

599. An einen gegebenen Kegelschnitt ist im Punkte P desselben eine Tangente zu legen. Wie läßt sich die Konstruktion ausführen?

600. Wieviele Tangenten lassen sich von einem Punkte $P(x_1, y_1)$ an einen Kegelschnitt legen, dessen Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

ist? Welcher Klasse gehören demnach die Kegelschnitte an?

601. Es sollen die Gleichungen der Tangenten bestimmt werden, welche sich von dem Koordinatenanfangspunkte an den Kegelschnitt

$$x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$$

ziehen lassen.

602. Welches sind die Gleichungen der Tangenten, die sich von dem Punkte $x_1 = 0$, $y_1 = 2$ an den Kegelschnitt

$$10xy - 2y^2 + 6x + 4y - 21 = 0$$

ziehen lassen?

603. Es soll der Winkel bestimmt werden, den die vom Koordinatenanfangspunkte an den Kegelschnitt

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

gelegten Tangenten mit einander einschließen.

604. Es soll die Gleichung eines Kegelschnittes gefunden werden, der von den Geraden

$$L_1x + M_1y + N_1 = 0, \quad L_2x + M_2y + N_2 = 0,$$
$$L_3x + M_3y + N_3 = 0, \; L_4x + M_4y + N_4 = 0, \; L_5x + M_5y + N_5 = 0$$

berührt wird.

605. Es soll der Kegelschnitt bestimmt werden, der von den Geraden

$$x = 0, \; y = 0, \; x + y - 1 = 0, \; 2x - y + 4 = 0, \; x - 2y + 6 = 0$$

berührt wird.

606. Welches sind die Gleichungen der Asymptoten eines Kegelschnittes, dessen Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

ist?

Beispiele. 1. $4x^2 + 2xy - y^2 + 6x + 2y + 3 = 0$;
2. $3x^2 - 4xy + 5y^2 - 30x - 16y - 20 = 0$.

607. Es sollen die Koordinaten des Schnittpunktes der Asymptoten eines Kegelschnittes bestimmt werden.

608. Wie groß ist der Winkel, den die Asymptoten eines Kegelschnittes einschließen?

Beispiel. $3x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 10y + 14 = 0$.

609. Es sollen die Gleichungen der Geraden gefunden werden, welche die Asymptotenwinkel des Kegelschnittes

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

halbieren.

Beispiel. $x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$.

Pole und Polaren, Durchmesser.

610. Wie heißt die Gleichung der Polare des Punktes $P(x_1, y_1)$ bezüglich des Kegelschnittes

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0?$$

Welche Form nimmt die Gleichung an, wenn der Pol mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammenfällt? Wo liegt die Polare, wenn der Pol der Mittelpunkt des Kegelschnittes ist?

Beispiel. $10xy - 2y^2 + 6x + 4y - 21 = 0$; $x_1 = -5$, $y_1 = 7$.

611. Die Gerade $Lx + My + N = 0$ möge als Polare bezüglich des Kegelschnittes

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

betrachtet werden. Welches sind die Koordinaten des zugehörigen Poles?

Beispiel. $4x^2 + 2xy - y^2 + 6x + 2y + 3 = 0$; $5x - y + 4 = 0$.

612. Wo liegt der Pol, wenn die Polare bezüglich des Kegelschnittes durch den Mittelpunkt des letzteren geht?

613. Die Punkte der Geraden $Lx + My + N = 0$ mögen als Pole des Kegelschnittes

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

betrachtet werden. Welche Lagen haben die zugehörigen Polaren?

614. Die Strahlen eines Büschels mögen als Polaren eines Kegelschnittes betrachtet werden. Auf welcher Linie liegen die zugehörigen Pole?

615. Von dem Punkte $P(x_1, y_1)$ sind Sekanten in den Kegelschnitt

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

gezogen. Auf jeder Sekante ist der Punkt Q zu bestimmen, welcher mit P die Strecke zwischen den Schnittpunkten des Kegelschnittes und der Sekante harmonisch teilt. Welches ist der geometrische Ort des Punktes Q?

616. Auf einer Geraden g liegen vier harmonische Punkte. Es ist zu zeigen, daß die Polaren dieser Punkte bezüglich des Kegelschnittes

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

ein harmonisches Büschel bilden.

617. Gegeben sind der Punkt P und der Kegelschnitt K. Es soll die Polare des Punktes P bezüglich des Kegelschnittes K durch Konstruktion gefunden werden.

618. Gegeben sind die Gerade g und der Kegelschnitt K. Es soll der der Geraden g zugehörige Pol bezüglich des Kegelschnittes durch Konstruktion gefunden werden.

619. Von einem Punkte P sollen an einen Kegelschnitt K die beiden Tangenten gelegt werden.

620. Gegeben ist ein Kegelschnitt K, ferner vier Punkte desselben P_1, P_2, P_3, P_4 und eine Tangente t. Wie lassen sich mit Hülfe der gegebenen Stücke Tangenten an den Kegelschnitt legen?

621. Gegeben sind drei Gerade $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$. Es soll die Gleichung eines Kegelschnitts bestimmt werden, der

von den beiden ersten Geraden berührt wird und zwar in den Punkten, in welchen dieselben von der dritten Geraden geschnitten werden.

622. Es soll die Gleichung einer Parabel gefunden werden, welche von den Geraden $3y - x - 12 = 0$ und $2y + x + 6 = 0$ berührt wird und zwar so, daß die Gerade $5x + 3y - 15 = 0$ Polare des Schnittpunktes jener Tangenten ist.

623. Welches ist die Gleichung eines Kegelschnittes, der durch den Koordinatenanfangspunkt geht, ferner die beiden Geraden $y - x - 3 = 0$, $y - 2x + 2 = 0$ zu Tangenten und die Gerade $y + x - 1 = 0$ zur Berührungssehne derselben hat?

624. Gegeben sind drei Gerade

$$L_1 \equiv y - x - 3 = 0, \quad L_2 \equiv 2y + x + 2 = 0,$$
$$L_3 \equiv 2y + 5x - 10 = 0.$$

Es soll ein Kegelschnitt bestimmt werden, der von der X-Achse berührt wird, der ferner L_1 und L_2 zu Tangenten hat, so daß L_3 Polare des Schnittpunktes von L_1 und L_2 ist.

625. Von einem beliebigen Punkte eines Kegelschnittes sind auf zwei feste Tangenten und die Polare des Durchschnittpunktes der letzteren Lote gefällt. Wie verhält sich das Rechteck aus den beiden ersten Loten zum Quadrate über dem dritten Lote?

626. Es soll die Gleichung der Polaren des Punktes P bezüglich eines Kegelschnittes bestimmt werden für den Fall, daß der Punkt P auf der unendlich fernen Geraden liegt. In welchem Verhältnis wird jede nach dem unendlich fernen Pol gerichtete Sehne des Kegelschnittes durch die Polare geteilt? (Durchmesser.)

627. Es ist zu zeigen, daß die Durchmesser eines Kegelschnittes ein Büschel bilden. Wo liegt der Mittelpunkt des Büschels?

628. Gegeben ist die Gleichung eines Durchmessers eines Kegelschnittes $y - y_0 = M(x - x_0)$, wo x_0, y_0 die Koordinaten des Mittelpunktes sind. Welches ist die Gleichung des konjugierten Durchmessers?

629. Es sollen die Gleichungen der Durchmesser eines Kegelschnittes bestimmt werden, welche den Asymptoten desselben konjugiert sind.

630. Welches sind die Gleichungen der konjugierten Durchmesser eines Kegelschnittes, die sich rechtwinklig durchschneiden?

Das Kegelschnittbüschel.

631. Gegeben sind die beiden Kegelschnitte

$$U_1 \equiv A_1 x^2 + 2 B_1 xy + C_1 y^2 + 2 D_1 x + 2 E_1 y + F_1 = 0,$$
$$U_2 \equiv A_2 x^2 + 2 B_2 xy + C_2 y^2 + 2 D_2 x + 2 E_2 y + F_2 = 0.$$

In wieviel Punkten schneiden sich dieselben? Welcher Gleichung entsprechen alle Kegelschnitte, die durch die Schnittpunkte der gegebenen Kurven $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ hindurchgehen?

632. Es sollen die Parabeln bestimmt werden, welche zu dem Kegelschnittbüschel $U_1 + k U_2 = 0$ gehören. Es sei

$$U_1 \equiv A_1 x^2 + 2 B_1 xy + C_1 y^2 + 2 D_1 x + 2 E_1 y + F_1 = 0,$$
$$U_2 \equiv A_2 x^2 + 2 B_2 xy + C_2 y^2 + 2 D_2 x + 2 E_2 y + F_2 = 0.$$

Beispiel. $U_1 \equiv x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0,$
$U_2 \equiv 3x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 10y + 14 = 0.$

633. Wie viele Geradenpaare enthält das Kegelschnittbüschel $U_1 + k U_2 = 0$?

634. Welche Geradenpaare gehören zu dem Kegelschnittbüschel $U_1 + k U_2 = 0$, wenn

$$U_1 \equiv 13x^2 + 3xy - 16y^2 - 42x + 39y - 5 = 0,$$
$$U_2 \equiv 5x^2 + 10y^2 - 27x - 57y + 65 = 0$$

ist?

635. Welcher Bedingung müssen die Konstanten in den Gleichungen der Fundamentalkurven des Kegelschnittbüschels $U_1 + k U_2 = 0$ genügen, wenn zu den Kurven des Büschels ein Kreis gehören soll?

636. Wie viele Kegelschnitte des Büschels $U_1 + k U_2 = 0$ werden von der X-Achse, wie viele von der Y-Achse berührt?

637. Gegeben ist ein Kegelschnittbüschel $U_1 + k U_2 = 0$. Auf welcher Kurve liegen die Mittelpunkte aller Kegelschnitte, die zu diesem Büschel gehören?

Beispiel. $U_1 \equiv 3x^2 - 4xy + 5y^2 - 30x - 16y - 20 = 0,$
$U_2 \equiv 4x^2 + 2xy - y^2 + 6x + 2y + 3 = 0.$

638. Gegeben ist das Kegelschnittbüschel $U_1 + k U_2 = 0$ und der Punkt $P(x_1, y_1)$. Wie liegen die Polaren des Punktes P bezüglich der Kurven des Büschels?

639. Durch das Kegelschnittbüschel $U_1 + k U_2 = 0$ ist eine Transversale S gelegt. Es ist zu zeigen, daß die Punkte, in denen

die Kegelschnitte von der Transversale geschnitten werden, eine involutorische Punktreihe bilden.

640. Die Gerade $Lx + My + N = 0$ möge als Polare bezüglich der Kegelschnitte des Büschels $U_1 + k\,U_2 = 0$ betrachtet werden. Auf welcher Kurve liegen die zugehörigen Pole?

Beispiel. $U_1 \equiv 4x^2 + 2xy - y^2 + 6x + 2y + 3 = 0$,
$U_2 \equiv x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$.

Die Gleichung der Geraden ist: $5x - y + 4 = 0$.

641. Wie gestaltet sich das Resultat der vorhergehenden Aufgabe, wenn die gegebene Gerade eine gemeinsame Sehne der Kegelschnitte des Büschels ist?

642. Gegeben ist ein Kegelschnitt $U_1 = 0$, die Tangente $L_1 = 0$ desselben im Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und eine Sekante $L_2 = 0$. Welcher Gleichung entspricht das Büschel aller Kegelschnitte, welche von $L_1 = 0$ im Punkte P_1 berührt werden und durch die Schnittpunkte von $U_1 = 0$ und $L_2 = 0$ hindurchgehen?

643. Gegeben sind: der Kegelschnitt

$$U_1 \equiv 4x^2 + 2xy - y^2 - 4x - 8y - 11 = 0,$$

eine Tangente desselben $L_1 \equiv 3x + y - 3 = 0$ und eine Sekante $L_2 \equiv 2x - y - 1 = 0$. Es soll die Gleichung eines Kegelschnittes bestimmt werden, der mit U_1 in demselben Punkte von L_1 berührt wird, ferner durch die Schnittpunkte von U_1 und L_2 und endlich durch den Koordinatenanfangspunkt geht.

644. Der Kegelschnitt $U_1 = 0$ wird von der Geraden $L_1 = 0$ im Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und von der Geraden $L_2 = 0$ im Punkte $P_2(x_2, y_2)$ berührt. Es soll die Gleichung eines Büschels von Kegelschnitten bestimmt werden, welche U_1 in P_1 und P_2 berühren.

645. Die Hyperbel $3x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 10y + 14 = 0$ wird von der Geraden $5x - y - 2 = 0$ in den beiden Punkten P_1 und P_2 geschnitten. Es soll die Gleichung einer Parabel bestimmt werden, welche die Hyperbel in den beiden Punkten P_1 und P_2 berührt.

Konstruktionsaufgaben.

646. Zur Konstruktion eines Kegelschnittes sind die beiden Brennpunkte F_1 und F_2, sowie die Tangente t gegeben.

647. Von einem Kegelschnitte sind die beiden Brennpunkte F_1, F_2 und ein Punkt P gegeben. Die Konstruktion ist auszuführen.

648. Man kennt von einem Kegelschnitte die Lage eines Brennpunktes F_1, sowie die dreier Tangenten t_1, t_2, t_3. Wie läßt sich die Konstruktion desselben ausführen?

649. Es soll ein Kegelschnitt konstruiert werden, wenn ein Punkt desselben P, ein Brennpunkt F_1 und zwei Tangenten t_1 und t_2 gegeben sind.

650. Gegeben sind von einem Kegelschnitte zwei Punkte P_1 und P_2, der Brennpunkt F_1 und eine Tangente t_1. Der Kegelschnitt ist zu konstruieren.

651. Durch die Punkte P_1, P_2, P_3 ist ein Kegelschnitt zu legen, welcher den Punkt F_1 zum Brennpunkte hat.

652. Zur Konstruktion eines Kegelschnittes sind gegeben: der eine Brennpunkt F_1, der nächstliegende Scheitel A_1 und die Tangente t_1.

653. Es soll ein Kegelschnitt gezeichnet werden, von dem der Brennpunkt F_1, die beiden Tangenten t_1 und t_2 und die Richtung der Hauptachse bekannt sind.

654. Durch die beiden Punkte P_1 und P_2 ist ein Kegelschnitt zu legen, der den Punkt F_1 zum Brennpunkte und eine Hauptachse von der Länge $2a$ hat.

655. Gegeben sind von einem Kegelschnitte der eine Brennpunkt F_1, die zugehörige Direktrix d_1 und eine Tangente t_1. Der Kegelschnitt ist zu konstruieren.

656. Von einem Kegelschnitte kennt man einen Punkt P, eine Tangente t_1 mit dem Berührungspunkte P_1 und eine Direktrix d_1. Wie findet man den der Direktrix zugehörigen Brennpunkt?

657. Ein Kegelschnitt soll konstruiert werden, welcher durch die beiden Punkte P_1 und P_2 geht, die Strecke $P_1 P_2$ zum Durchmesser und die Gerade d_1 zur Direktrix hat.

658. Um den Mittelpunkt O ist ein Kegelschnitt zu beschreiben, welcher die Gerade d zur Direktrix hat, so daß die Gerade p Polare des Punktes P bezüglich der Kurve wird.

659. Es soll ein Kegelschnitt konstruiert werden, der durch den Punkt P geht und die Gerade d_1 zur Direktrix hat; und zwar möge die Gerade p_1 Polare des Punktes P_1 bezüglich der Kurve sein.

660. Von einem Kegelschnitte sind fünf Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 gegeben. Zu finden sind: a) ein sechster Punkt der Kurve, b) der Mittelpunkt.

661. Von einem Kegelschnitte sind fünf Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 gegeben. Wie lassen sich die Tangenten konstruieren, die den Kegelschnitt in diesen fünf Punkten berühren?

662. Gegeben sind von einem Kegelschnitte die Punkte P_1, P_2, P_3, eine Tangente t und der Berührungspunkt derselben P_4. Es soll ein fünfter Punkt desselben durch Konstruktion gefunden werden.

663. Ein Kegelschnitt möge von der Geraden t_1 im Punkte P_1, von der Geraden t_2 im Punkte P_2 berührt werden. Wie läßt sich im Punkte P_3 an denselben eine Tangente legen?

664. Fünf Tangenten t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 eines Kegelschnittes sind der Lage nach gegeben. Es soll eine sechste Tangente desselben durch Konstruktion gefunden werden.

665. Von einem Kegelschnitte sind fünf Tangenten t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 gegeben. Es sollen die Berührungspunkte dieser fünf Tangenten bestimmt werden.

666. Von einem Kegelschnitte sind fünf Tangenten t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 gegeben. Wie läßt sich die Lage des Mittelpunktes durch Konstruktion ermitteln?

667. Gegeben sind drei Tangenten t_1, t_2, t_3 und der Mittelpunkt O eines Kegelschnittes. Wie läßt sich die Kurve konstruieren?

668. Von einem Kegelschnitte sind drei Tangenten t_1, t_2, t_3 und die Berührungspunkte der beiden ersten P_1, P_2 gegeben. Der Berührungspunkt der dritten Tangente soll gesucht werden.

Inhaltsverzeichnis.

AUFGABEN

AUS DER

ANALYTISCHEN GEOMETRIE

DER EBENE

VON

DR. ADOLF HOCHHEIM,

PROFESSOR.

HEFT II.

DIE KEGELSCHNITTE.

ABTEILUNG I.

B. AUFLÖSUNGEN.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

LEIPZIG,

VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1883.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Die Parabel.

1. Da nach der Aufgabe die Koordinaten des Punktes P der Relation $x + \frac{p}{4} = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{4}\right)^2}$ genügen müssen, so ergiebt sich als Gleichung des geometrischen Ortes $y^2 = px$.

2. $y^2 = 17x$.

3. $(y - b)^2 = \pm p\,(x - a)$.

Beispiel. $2y^2 + 12y - 11x + 73 = 0$ oder
$2y^2 + 12y + 11x - 37 = 0$.

4. $(y + 7)^2 = 4\,(x - 3)$.

5. Der Parameter ist $p = \frac{6}{7}$, die Koordinaten des Scheitels sind: $x_1 = -2$, $y_1 = \frac{7}{4}$, die des Brennpunktes: $x_2 = -1\frac{11}{14}$, $y_2 = \frac{7}{4}$.

6. Die Parabel geht über in eine Doppelgerade, welche mit der X-Achse zusammenfällt.

7. $x_1 = 0,\ y_1 = 0;\ x_{\substack{2\\3}} = \frac{p}{q^2},\quad y_{\substack{2\\3}} = \pm\frac{p}{q}$.

Beispiele. a) $x_{\substack{2\\3}} = \frac{9}{25},\ \ y_{\substack{2\\3}} = \pm 1\frac{4}{5}$;
b) $x_{\substack{2\\3}} = 68,\ \ y_{\substack{2\\3}} = \pm 34$.

8. $31y \mp 12\sqrt{5}x \pm 15\sqrt{5} = 0;\ d = 10{,}25$.

9. $y_1^{\,2} - 10\sqrt{2}\,y_1 = 20x_1$.

10. $\varrho = \dfrac{\frac{1}{2}p}{1 - \cos\vartheta}$ oder $\varrho = \dfrac{p}{4\sin^2\frac{\vartheta}{2}}$.

11. Soll $\varrho = p$ sein, so muß $\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{2}$, also $\angle\vartheta = 60^0$ sein. Einen Minimalwert besitzt ϱ für $\angle\vartheta = 180^0$, da der Nenner des Bruches $\dfrac{p}{4\sin^2\frac{\vartheta}{2}}$ in diesem Falle ein Maximum ist. Durch Einsetzung von $\vartheta = 180^0$ erhält man $\varrho = \frac{p}{4}$.

12. Man erhält a) für $\angle\vartheta = 45^0$, $\varrho = 10{,}24264$,
b) „ $\angle\vartheta = 60^0$, $\varrho = 6$.

13. Es ist $\varrho_1 = \frac{p}{2(1-\cos\varphi)}$, $\varrho_2 = \frac{p}{2(1+\cos\varphi)}$, also $\varrho_1 + \varrho_2 = s = \frac{p}{\sin^2\varphi}$.

Beispiel. $s = 119{,}6808$.

14. Es ist $\varrho_1 \cdot \varrho_2 = \frac{p^2}{4\sin^2\varphi} = \frac{p}{4} \cdot s$.

Das Rechteck aus den Abschnitten einer Brennpunktsehne der Parabel ist demnach gleich dem aus der ganzen Sehne und dem Abstande des Brennpunktes vom Scheitel.

15. Nach der vorigen Lösung ist $\varrho_1 \cdot \varrho_2 = \frac{p^2}{4\sin^2\vartheta}$, also $\varrho_1 \sin\vartheta \cdot \varrho_2 \sin\vartheta = y_1 \cdot y_2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$, d. h. das Rechteck aus den beiden Loten, welche von den Endpunkten einer Brennpunktsehne auf die Achse gefällt sind, ist gleich dem Quadrate über der Hälfte des Parameters.

16. Die Parabel wird von der Geraden in zwei Punkten geschnitten, deren Koordinaten sind:

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{p - 2Mn \pm \sqrt{p(p-4Mn)}}{2M^2},$$

$$y_{\frac{1}{2}} = \frac{p \pm \sqrt{p(p-4Mn)}}{2M}.$$

Für $p > 4Mn$ schneidet die Gerade die Parabel in zwei reellen Punkten, für $p = 4Mn$ fallen beide Schnittpunkte zusammen; die Gerade ist also eine Tangente der Parabel. Ist $p < 4Mn$, so sind die beiden Schnittpunkte imaginär.

Beispiele. a) $x_1 = 4$, $y_1 = 6$;
$x_2 = 25$, $y_2 = 15$.

b) Die Gerade berührt die Parabel in dem Punkte
$x_1 = 12$, $y_1 = 6$.

c) Die Gerade schneidet die Parabel in zwei imaginären Punkten

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{-1165 \mp 5i\sqrt{28655}}{288}$$

$$y_{\frac{1}{2}} = \frac{-55 \pm i\sqrt{28655}}{24}.$$

17. Errichtet man auf einer Geraden in ihrem Schnittpunkte mit der Scheiteltangente der Parabel ein Lot, so schneidet dieses die Achse in der Entfernung Mn vom Scheitel. Daraus folgt: Eine Gerade schneidet die Parabel in zwei reellen Punkten, oder berührt sie, oder schneidet dieselbe in zwei imaginären Punkten, wenn das auf ihr in ihrem Schnittpunkt mit der Scheiteltangente errichtete Lot die Achse diesseit des Brennpunktes (d. h. auf der Seite, wo der Scheitel liegt) oder im Brennpunkte oder jenseit des Brennpunktes schneidet.

18. Die Gerade schneidet die Parabel nur in einem endlichen Punkte $x_1 = \frac{n^2}{p}$, $y_1 = n$; der zweite Schnittpunkt liegt in der Unendlichkeit. (Vergl. Lös. 16.)

19. Die Bedingungsgleichung $\frac{p}{4} v^2 - u = 0$ ist zugleich die Gleichung der Parabel in Linienkoordinaten.

20. Der Abstand des Punktes P von der Geraden g sei k. Betrachtet man g und das von P auf g gefällte Lot als Achsen, so ergiebt sich die Relation $v^2 k - u = 0$. Die Enveloppe der Lote ist also eine Parabel mit der Brennweite k.

21. $s = 22\sqrt{3}$; $h = 33$.

22. $x + y - 6 = 0$.

23. $y - y_1 = \frac{p}{2y_1}(x - x_1)$.

Beispiel. $6y - 7x + 17 = 0$.

24. Die Koordinaten der Schnittpunkte sind:

$$x_1 = -\tfrac{3}{2},\ \ y_1 = 6;\quad x_2 = 3\tfrac{3}{8},\ \ y_2 = -\tfrac{1}{2}.$$

Der Abstand ist $d = \frac{7}{15}$.

25. $(y \mp 6)^2 = 3x$.

26. $y = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + p\alpha}}{2\alpha}\,x$.

Beispiel. $y = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{16}\,x$.

27. Die Gleichung der Tangente ist

$$2yy_1 = p(x + x_1).$$

Beispiele. a) $4y - x - 20 = 0$;
b) $8y + 7x + 8 = 0$.

28. Die Gleichung der Normale ist

$$p(y - y_1) + 2y_1(x - x_1) = 0.$$

Beispiel. $3y - 10x + 295 = 0$.

29a. Die Gleichungen der Tangenten sind:

$$2y - x - 23 = 0, \quad 2y + x + 11 = 0,$$

die Neigungswinkel derselben zur X-Achse:

$$\angle \varphi_1 = 26^0\, 33'\, 54{,}2'', \quad \angle \varphi_2 = 153^0\, 26'\, 5{,}8'',$$

die Gleichungen der Normalen:

$$y + 2x - 9 = 0, \quad y - 2x + 3 = 0.$$

29b. Zur Bestimmung des Parameters ergiebt sich die Relation $\frac{pM^2}{4L^2} - \frac{N}{L} - a = 0$, demnach ist die Gleichung der Parabel

$$y^2 = \frac{4L(N + aL)}{M^2}(x - a).$$

Beispiel. $y^2 = \frac{549}{4}(x - 6)$.

30. Man erhält:

$$\mathrm{Tg} = \sqrt{y_1^{\,2} + 4x_1^{\,2}} = \sqrt{x_1(p + 4x_1)};$$

$$\mathrm{N} = \sqrt{y_1^{\,2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{p\left(x_1 + \frac{p}{4}\right)};$$

$$\mathrm{Sbtg} = 2x_1; \qquad \mathrm{Sbn} = \frac{p}{2}.$$

Beispiel. $\mathrm{Tg} = \sqrt{266} = 16{,}3095\ldots,$

$\mathrm{N} = \sqrt{95} = 9{,}74679\ldots,$

$\mathrm{Sbtg} = 14, \ \mathrm{Sbn} = 5.$

31. Schneidet man auf der Verlängerung der Achse über den Scheitel hinaus ein Stück ab, welches gleich der Abscisse des Punktes P ist, so ist der Endpunkt dieses Abschnittes ein zweiter Punkt der Tangente. Verlängert man dagegen die Abscisse über den Fußpunkt der Ordinate hinaus um den halben Parameter, so erhält man einen zweiten Punkt der Normale.

32. Der Brennpunkt halbiert den Abstand der beiden Schnittpunkte; jeder der beiden Abschnitte ist gleich $x_1 + \frac{p}{4}$.

33. Die Koordinaten des Berührungspunktes sind:

$$x_1 = \frac{p}{4\,\mathrm{tg}^2\varphi}, \quad y_1 = \frac{p}{2\,\mathrm{tg}\,\varphi}.$$

Beispiele. a) $x_1 = 3\frac{3}{4}$, $y_1 = 7\frac{1}{2}$;

b) $x_1 = 0{,}916666\ldots$, $y_1 = -3{,}175428\ldots$

34. Die Abscisse des gesuchten Punktes ist

$$x_1 = -\tfrac{3}{4}p,$$

die Gleichung der Tangente

$$y\sqrt{3} - x - \tfrac{3}{4}p = 0.$$

35. Die Koordinaten der Berührungspunkte sind:

$$\text{a)}\ x_{\frac{1}{2}} = -\frac{p}{8} \pm \frac{p}{8}\sqrt{17}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \frac{\pm p}{2}\sqrt{-\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{17}}.$$

Nur das positive Vorzeichen vor $\sqrt{17}$ ist brauchbar.

$$\text{b)}\ x_{\frac{1}{2}} = \frac{p}{12}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \pm\frac{p}{2\sqrt{3}}.$$

36. Man erhält zwei Punkte:

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{p(1+\sqrt{17})}{32}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \pm\frac{p}{4}\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}};$$

ferner ist $\operatorname{tg}\varphi = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}$, also:

$$\angle\varphi_1 = 141^0\,19'\,55'', \quad \angle\varphi_2 = 38^0\,40'\,5''.$$

37. Außer den Koordinaten des Scheitels der Parabel genügen der Anforderung

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{p}{4}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \pm\frac{p}{2},$$

demnach ist $\operatorname{tg}\varphi = \pm 1$, also:

$$\angle\varphi_1 = 45^0, \quad \angle\varphi_2 = 135^0.$$

38. Man findet:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0; \quad x_{\frac{2}{3}} = \tfrac{3}{4}p, \quad y_{\frac{2}{3}} = \pm\frac{p}{2}\sqrt{3}.$$

39. Beide Winkel sind Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks, in dem jeder Schenkel gleich $x_1 + \frac{p}{4}$ ist.

40. Die geometrischen Örter sind:

a) die Scheiteltangente $(x = 0)$,

b) die Direktrix $\left(x = -\frac{p}{4}\right)$.

41. Mit Hilfe der vorigen Lösung findet man leicht, daß beide Linien gleich sind.

42. Die Schnittpunkte liegen auf der Direktrix der Parabel $x = -\frac{p}{4}$.

43. Die Gleichung der Tangente ist $y = Mx + \frac{p}{4M}$, die Koordinaten des Berührungspunktes $x_1 = \frac{p}{4M^2}$, $y_1 = \frac{p}{2M}$.

Beispiel. $2y - 3x - 1\frac{2}{3} = 0$; $x_1 = \frac{5}{9}$, $y_1 = \frac{5}{3}$.

44. Die Gleichung der Tangente ist

$$y(M \operatorname{tg} \varphi + 1) - x(M - \operatorname{tg} \varphi) - p\,\frac{(M \operatorname{tg} \varphi + 1)^2}{4(M - \operatorname{tg} \varphi)} = 0;$$

die Koordinaten des Berührungspunktes

$$x_1 = \frac{p}{4}\left\{\frac{M \operatorname{tg} \varphi + 1}{M - \operatorname{tg} \varphi}\right\}^2, \quad y_1 = \frac{p}{2}\left\{\frac{M \operatorname{tg} \varphi + 1}{M - \operatorname{tg} \varphi}\right\}.$$

Beispiel. $2y - x - 12 = 0$, $x_1 = 12$, $y_1 = 12$.

45a. Man verbinde P mit dem Brennpunkte F und beschreibe über dieser Strecke als Durchmesser einen Kreis. Die Verbindungslinien des Punktes P mit den Schnittpunkten des Kreises und der Scheiteltangente sind die gesuchten Tangenten.

Determination. Man erhält im allgemeinen zwei Tangenten. Liegt der Punkt P in der Parabelfläche, so schneidet der Kreis die Scheiteltangente nicht, weil der Radius des Kreises kleiner ist als der Abstand des Mittelpunktes von der Scheiteltangente.

45b. Man verbinde P mit F und beschreibe mit dieser Strecke als Radius um P einen Kreis. Die Schnittpunkte dieses Kreises und der Direktrix lassen sich zur Konstruktion benutzen (s. Lös. 41). Die Determination ist leicht anzugeben.

46. $$d : N = \frac{\frac{p^2}{4} + p x_1}{\sqrt{4 y_1^2 + p^2}} : \sqrt{p\left(\frac{p}{4} + x_1\right)} = 1 : 2.$$

47. Eliminiert man aus den Gleichungen

$$\begin{gathered} y_1^2 = p x_1, \qquad y_2^2 = p x_2, \\ 2 y y_1 = p(x + x_1), \quad 2 y y_2 = p(x + x_2), \\ 16 y_1^2 y_2^2 + 8 p^2 y_1 y_2 + p^4 = 0, \end{gathered}$$

die Größen x_1, y_1, x_2, y_2, so erhält man als Gleichung des geometrischen Ortes $x = -\frac{p}{4}$. Der Scheitel des rechten Winkels beschreibt also die Direktrix.

48. Das Rechteck aus den beiden Subtangenten ist gleich dem Quadrate über dem halben Parameter, denn es ist

$$\frac{p}{2y_1} = -\frac{2y_2}{p}, \quad \text{also} \quad \left(\frac{p}{2}\right)^2 = 4x_1x_2.$$

49. Die Tangenten durchschneiden sich rechtwinklig.

50. Die Schnittpunkte liegen alle auf einer Geraden, deren Gleichung $y + x \operatorname{tg} \varphi + \frac{p}{4 \operatorname{tg} \varphi} = 0$ ist. Weise nach, daß dieser geometrische Ort ebenfalls eine Tangente der Parabel ist.

51. Die Gleichung der Verbindungslinie ist

$$y\left(\frac{y_1y_2}{p} - \frac{p}{4}\right) - x\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right) + \frac{p}{4}\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right) = 0.$$

Dieselbe ist identisch mit der Gleichung

$$\frac{y\left(x_1 - \frac{p}{4}\right) - y_1\left(x - \frac{p}{4}\right)}{x_1 + \frac{p}{4}} + \frac{y\left(x_2 - \frac{p}{4}\right) - y_2\left(x - \frac{p}{4}\right)}{x_2 + \frac{p}{4}} = 0.$$

52. Die Koordinaten des Schnittpunktes sind: $x = \sqrt{x_1x_2}$, $y = \frac{y_1+y_2}{2}$, also:

$$x = -4, \quad y = -2{,}5;$$

der eingeschlossene Winkel:

$$\varphi = 55^0\, 13'\, 20''.$$

53. Bezeichnen wir den von den Tangenten eingeschlossenen Winkel mit φ_1, den von den Brennstrahlen gebildeten mit φ_2, so finden wir

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{2p\,(y_2 - y_1)}{4y_1y_2 + p^2},$$

ferner

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{4p\,(y_2 - y_1)\,(4y_1y_2 + p^2)}{(4y_1y_2 + p^2)^2 - 4p^2\,(y_2 - y_1)^2},$$

also ist $\angle \varphi_2 = \angle 2\varphi_1$.

54. Man findet:

$$t_1^{\,2} = (y_1 - y_2)^2\left(\frac{x_1}{p} + \tfrac{1}{4}\right), \quad t_2^{\,2} = (y_1 - y_2)^2\left(\frac{x_2}{p} + \tfrac{1}{4}\right),$$

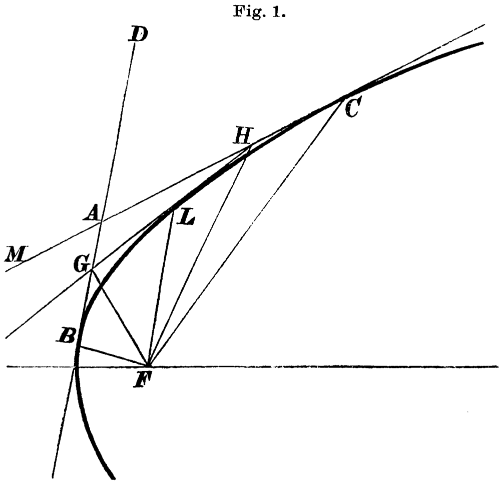
also ergiebt sich

$$t_1^{\,2} : t_2^{\,2} = x_1 + \frac{p}{4} : x_2 + \frac{p}{4}.$$

55. Nach Lösung 51 ist (s. Fig. 1)

$$\angle BFG = \angle GFL,$$

Fig. 1.



ferner

$$\angle CFH = \angle HFL,$$

demnach:

$$\angle GFH = \tfrac{1}{2} \angle BFC.$$

Der Winkel GFH behält daher dieselbe Größe, auch wenn der Punkt L auf der Parabel fortrückt.

56. Es seien A, G, H die Ecken des Tangentendreiecks (s. Fig. 1). Aus der Lösung der vorhergehenden Aufgabe folgt $\angle GFH = \frac{1}{2} \angle BFC$. Nach Lösung 53 ist aber auch $\angle MAG = \frac{1}{2} \angle BFC$, demnach ist

$$\angle GAH + \angle GFH = 180^0,$$

also $AGFH$ ein Sehnenviereck. Daraus folgt: Beschreibt man um das Tangentendreieck AGH einen Kreis, so muß derselbe auch durch den Brennpunkt F gehen.

57. Nach einer der Aufgabe entsprechenden Abänderung der Fig. 1 findet man durch eine einfache geometrische Betrachtung, daß die drei Punkte in einer Geraden liegen müssen.

58. $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; $x_{\substack{2\\3}} = \frac{3}{4} p$, $y_{\substack{2\\3}} = \pm \frac{p}{2} \sqrt{3}$.

59. Durch wiederholte Anwendung von Lösung 57 findet man: Die Geraden, welche die Ecken des gleichseitigen Dreiecks mit den gegenüberliegenden Berührungspunkten verbinden, schneiden sich im Brennpunkte der Parabel.

60. a) $\operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{-2 + \sqrt{5}}$, $\angle \varphi_1 = 151^0\, 29'\, 18''$;

b) $\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{5}{\sqrt{3}}$, $\angle \varphi_2 = 70^0\, 53'\, 36''$.

61. Der Parameter der gesuchten Parabel ergiebt sich nach Elimination von x_1 aus den beiden Gleichungen

$$x_1 + \frac{p}{2} - a = 0, \quad \frac{p}{2} x_1 = a(x_1 - a) + r^2.$$

Man erhält demnach:

$$y^2 = \left(2a \pm 2\sqrt{a^2 - r^2}\right)x,$$

d. h. es existieren zwei Parabeln, welche der Anforderung genügen. Der gegebene Kreis wird nur von der Parabel $y^2 = \left(2a - 2\sqrt{a^2 - r^2}\right)x$ in zwei reellen Punkten, von der andern Parabel dagegen in zwei imaginären Punkten berührt. Die Lösung ist nur möglich, wenn $a > r$ ist.

Beispiel. $y^2 = 50x$; $y^2 = 2x$.

62. Sind x_1, y_1 die Koordinaten des Berührungspunktes der Parabel, x_2, y_2 die des Berührungspunktes des Kreises, so muß den beiden Gleichungen

$$2yy_1 = p(x + x_1) \quad \text{und} \quad yy_2 + xx_2 = r^2$$

dieselbe Gerade entsprechen. Zur Bestimmung der Koordinaten der Berührungspunkte lassen sich demnach die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2y_1x_2 + py_2 = 0, \quad & x_1x_2 + r^2 = 0, \\ y_1^2 = px_1, \quad & x_2^2 + y_2^2 = r^2 \end{aligned}$$

aufstellen. Mit Hilfe derselben findet man, daß sich nur zwei gemeinschaftliche Tangenten konstruieren lassen, und zwar entsprechen diese der Gleichung

$$\pm y\sqrt{-8r^2 + 4r\sqrt{4r^2 + p^2}} + x\left(2r - \sqrt{4r^2 + p^2}\right) = rp.$$

Beispiel. $\pm y\sqrt{20\sqrt{109} - 200} + x\left(10 - \sqrt{109}\right) = 15.$

63. Zur Bestimmung der Berührungspunkte dienen folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} p_2y_1 = p_1y_2, \quad & x_1 = x_2 - 2a, \\ y_1^2 = p_1x_1, \quad & y_2^2 = p_2(x_2 - a). \end{aligned}$$

Die Tangenten entsprechen der Gleichung

$$\pm 2\sqrt{\frac{a}{p_2 - p_1}}\, y = x + \frac{ap_1}{p_2 - p_1}.$$

Wann besitzen die Parabeln keine reellen gemeinschaftlichen Tangenten?

Beispiele. a) $\pm 3y = x + 15\frac{3}{4}$,

b) $\pm 2i\sqrt{\frac{7}{6}}\, y = x - \frac{35}{2}$.

64. Die beiden Tangenten entsprechen der Gleichung

$$y - y_1 = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - px_1}}{2\,x_1}\,(x - x_1).$$

Die Koordinaten der Berührungspunkte sind:

$$x_{\frac{2}{3}} = \frac{2\,y_1^2 - px_1 \pm 2\,y_1\sqrt{y_1^2 - px_1}}{p},$$

$$y_{\frac{2}{3}} = y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - px_1}.$$

Beide Tangenten sind reell, wenn $y_1^2 > px_1$, d. h. wenn der Punkt außerhalb der Parabel liegt, sie fallen zusammen, wenn $y_1^2 = px_1$ und sind imaginär, wenn $y_1^2 < px_1$, also wenn der Punkt innerhalb der Parabelfläche liegt.

Beispiele. a) $6\,y - (7 \pm \sqrt{34})\,x = 21 \mp 3\sqrt{34}$,

$$x_{\frac{2}{3}} = \frac{83 \pm 14\sqrt{34}}{5}, \quad y_{\frac{2}{3}} = 7 \pm \sqrt{34};$$

b) $10y - (3 \pm i\sqrt{46})\,x = 15 \mp 5\,i\sqrt{46}$,

$$x_{\frac{2}{3}} = \frac{-37 \pm 6\,i\sqrt{46}}{11}, \quad y_{\frac{2}{3}} = 3 \pm i\sqrt{46}.$$

65. a) $x_2 \,.\, x_3 = x_1^2$, b) $y_2 + y_3 = 2\,y_1$.

66. Es ist $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\sqrt{y_1^2 - px_1}}{x_1 + \dfrac{p}{4}}$.

Für $x_1 = -\dfrac{p}{4}$ ist $\operatorname{tg}\varphi = \infty$, also $\angle\,\varphi = 90^0$; demnach ist $x_1 = -\dfrac{p}{4}$ die Gleichung des Ortes für den Durchschnittspunkt zweier Tangenten, die aufeinander lotrecht stehen.

Beispiel. $\angle\,\varphi = 102^0\,20'\,21''$.

67. Die Gleichung der Polare ist

$$2\,yy_1 = p\,(x + x_1).$$

Beispiele. a) $5\,y - 3\,x + 6 = 0$;

b) $2\,y + 3\,x + 6 = 0$, die Polare ist zugleich Tangente der Parabel;

c) $12\,y - 5\,x - 55 = 0$, die Polare hat keinen reellen Punkt mit der Parabel gemein.

68. $x = -\dfrac{p}{4}$. Die Polare fällt mit der Direktrix zusammen.

69. $x_{\frac{1}{2}} = \frac{57 \mp 4\sqrt{14}}{11}$, $\quad y_{\frac{1}{2}} = -1 \pm 2\sqrt{14}$.

70. Die Abscisse des Punktes, in dem die Polare geschnitten wird, ist

$$x_2 = \frac{2y_1^2 - px_1}{p},$$

die Abscisse des Schnittpunktes der Parabel

$$x_3 = \frac{y_1^2}{p},$$

demnach ist $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, d. h. die Parabel halbiert die Strecke.

71. Die Abschnitte, welche von der Polare auf den Koordinatenachsen gebildet werden, sind: $-x_1$, $\frac{px_1}{2y_1}$, deren Konstruktion sich leicht ausführen läßt.

72. Die Koordinaten des Poles sind:

$$x_1 = \frac{N}{L}, \quad y_1 = -\frac{pM}{2L}.$$

Läuft demnach die Polare der Achse parallel, so liegt der Pol in der Unendlichkeit.

Beispiele. a) $x_1 = -9\frac{1}{3}$, $\quad y_1 = 9\frac{1}{3}$;
b) $x_1 = 2$, $\quad y_1 = \frac{7}{52}$.

73. Die Koordinaten des Schnittpunktes sind: $\frac{p}{4}$, 0; d. h. der Schnittpunkt fällt mit dem Brennpunkte zusammen. Das Lot ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Abschnitten der Polare.

74a. Errichtet man im Brennpunkte auf der Geraden g ein Lot, so schneidet dieses die Direktrix im Pole.

74b. Zieht man durch A eine Brennpunktsehne, so schneidet das im Brennpunkte auf derselben errichtete Lot die Direktrix in einem zweiten Punkte der Tangente.

75a. Die Richtungskonstanten sind: $\frac{y_1}{x_1 - \frac{p}{4}}$ und $-\frac{x_1 - \frac{p}{4}}{y_1}$; die beiden Strahlen durchschneiden sich also rechtwinklig.

75b. Der von den beiden Geraden eingeschlossene Winkel ist ein rechter, da die Richtungskonstante der Polare $\frac{p}{2y_1}$, die der Verbindungslinie $-\frac{2y_1}{p}$ ist.

76. Die beiden Abschnitte sind gleich.

77. Die Verbindungslinie der Pole ist die Polare des Schnittpunktes der beiden gegebenen Geraden und entspricht der Gleichung $13y - 7x = 10\frac{1}{2}$. Der Inhalt des Dreiecks ist

$$4\,\tfrac{1257}{3712}\,\square.$$

78. Die Polaren entsprechen der Gleichung $2yy_1 - 2k^2 = p(x + x_1)$, d. h. sie bilden ein Büschel, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der beiden Geraden $yy_1 - k^2 = 0$ und $x + x_1 = 0$ ist.

79. Dividiert man die Gleichung der Polare

$$2yy_1 = p(x + x_1)$$

durch $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, so erhält man:

$$\frac{2yy_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} - \frac{px}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} - \frac{px_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = 0,$$

oder

$$2y\sin\varphi - \frac{px}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} - p\cos\varphi = 0,$$

wo φ der Winkel ist, den die Verbindungslinie zwischen dem Koordinatenanfangspunkte und dem Punkte P mit der X-Achse einschließt. Rückt der Punkt P in die Unendlichkeit, so geht die Gleichung über in

$$2y\sin\varphi - p\cos\varphi = 0.$$

Die Polare eines unendlich fernen Punktes läuft demnach der Achse der Parabel parallel; sie wird ein Durchmesser derselben genannt.

80. Es sei $y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi + n$ eine nach dem unendlich fernen Punkte gerichtete Gerade. Sind (x_1, y_1) und (x_2, y_2) die Punkte, in welchem dieselbe von der Parabel, dagegen (x_3, y_3) der Punkt, in welchem sie von dem Durchmesser geschnitten wird, so ist:

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Jeder Durchmesser halbiert sonach die Schar paralleler Sehnen, welche sich in dem zugehörigen unendlich fernen Pole durchschneiden.

81. $y = \frac{p}{2M}$.

Beispiel. $y = 3\frac{1}{8}$.

82. $y = \frac{p}{2k} x + n$, worin n jeden beliebigen reellen Wert besitzen kann.

Beispiel. $22y + 13x - 22n = 0$.

83. $y - x + 1 = 0$.

84. $2qy - px = 0$. Die Sehne ist der Tangente parallel, welche im Endpunkte des Durchmessers die Parabel berührt.

Beispiel. $9y + 8x = 0$.

85. Die Polaren entsprechen der Gleichung

$$14y + 9x + 9x_1 = 0,$$

worin x_1 jeden beliebigen reellen Wert haben kann; sie sind demnach identisch mit den Sehnen, welche von dem gegebenen Durchmesser halbiert werden.

86. $y = \frac{p}{2M}$, d. h. der geometrische Ort der Pole ist der den Sehnen konjugierte Durchmesser.

87. Die Richtungskonstante der Tangente ebenso wie die der Polare ist gleich $\frac{p}{2y_1}$. Die beiden geraden Linien sind demnach parallel.

88. Der Durchmesser halbiert die Polare, folglich auch die ihr parallele Tangente. Da die Strecke des Durchmessers zwischen P und der Polare durch die Parabel halbiert wird (vergl. Lösung 70), so folgt, daß auch jede der beiden ersten Tangenten durch die dritte in zwei gleiche Teile zerlegt wird.

89. Sind (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) die Berührungspunkte der Tangenten, so ist der Inhalt des eingeschriebenen Dreiecks

$$J' = \frac{1}{2p}\{y_1(y_2^2 - y_3^2) + y_2(y_3^2 - y_1^2) + y_3(y_1^2 - y_2^2)\},$$

dagegen der des umschriebenen Dreiecks (vergl. Lösung 52)

$$J'' = \frac{1}{4p}\{y_1(y_2^2 - y_3^2) + y_2(y_3^2 - y_1^2) + y_3(y_1^2 - y_2^2)\}.$$

Daraus folgt: $J' = 2J''$.

90. Durch Anwendung der Transformationsformeln

$$x = x_1 + \xi + \eta \cos \varphi,$$
$$y = y_1 + \eta \sin \varphi$$

erhält man

$$\eta^2 = \frac{p}{\sin^2 \varphi} \xi.$$

91. Nach der vorhergehenden Lösung ist der Parameter $p_1 = \frac{p}{\sin^2 \varphi}$, oder da $\operatorname{tg} \varphi = \frac{p}{2 y_1}$ ist, $p_1 = p + 4 x_1$, d. h. der Parameter eines Durchmessers ist gleich der vierfachen Entfernung des Endpunktes des letzteren vom Brennpunkte der Parabel.

92. Wählt man den konjugierten Durchmesser und die Tangente im Endpunkte desselben zu Koordinatenachsen, so erhält man

$$(2 \eta_1)^2 : (2 \eta_2)^2 = \xi_1 : \xi_2,$$

d. h. die Quadrate paralleler Sehnen verhalten sich wie die Entfernungen ihrer Halbierungspunkte vom Endpunkte des konjugierten Durchmessers.

93. $x_1 = -a, \quad y_1 = -\frac{a p}{2 b \sin^2 \varphi}.$

94. Wählt man den der Sehne konjugierten Durchmesser zur Abscissenachse, so findet man leicht, daß die beiden äußeren Abschnitte der Sehne einander gleich sind.

95. Die Gleichung des Ortes ist

$$y^2 = \frac{p}{4} x,$$

d. h. die Halbierungspunkte liegen auf einer Parabel, deren Parameter gleich dem vierten Teile des Parameters der Fundamentalparabel ist.

96. Die Gleichungen der Örter sind in Polarkoordinaten:

$$\text{a) } \varrho = \frac{\frac{p}{4}}{1 - \cos \varphi}, \quad \text{b) } \varrho = \frac{p}{1 - \cos \varphi},$$

oder in Parallelkoordinaten bezogen auf das ursprüngliche Achsensystem:

$$\text{a) } y^2 = \frac{p}{2} x - \frac{p^2}{16}, \quad \text{b) } y^2 = 2 p x + \frac{p^2}{2}.$$

97. Ist $y = \operatorname{tg} \alpha \left(x + \frac{p}{4}\right)$ die Gleichung einer Sekante, so sind die Koordinaten des Halbierungspunktes der Sehne

$$\xi = \frac{p}{2\,\mathrm{tg}^2\alpha} - \frac{p}{4}, \quad \eta = \frac{p}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Daraus erhält man durch Elimination von $\mathrm{tg}\,\alpha$ die Gleichung des Ortes

$$\eta^2 = \frac{p}{2}\,\xi + \frac{p^2}{8}.$$

98. Eliminiert man x_1 aus den Relationen

$$y - \sqrt{p x_1} = -2\sqrt{\frac{x_1}{p}}\,(x - x_1),$$

$$2y\sqrt{p x_1} = p\left(x - \frac{p}{4}\right),$$

so findet man als Gleichung des geometrischen Ortes

$$\left(y^2 - \frac{p}{4}\,x + \frac{p^2}{16}\right)\left\{y^2 + \left(x - \frac{p}{4}\right)^2\right\} = 0.$$

Der Gleichung $y^2 + \left(x - \frac{p}{4}\right)^2 = 0$ entspricht der Brennpunkt der gegebenen Parabel. Die Fußpunkte der Lote liegen demnach auf der Parabel

$$y^2 - \frac{p}{4}\,x + \frac{p^2}{16} = 0.$$

99. $\{y^2 - 4p\,(x - \frac{3}{4}p)\}\,(x - \frac{3}{4}p) = 0.$

Der geometrische Ort wird von einer Parabel und deren Scheiteltangente gebildet.

100. $y^2 = px + \frac{p^2 d^2}{16}.$

101. Die Gerade g sei die Y-Achse, das von P darauf gefällte Lot die X-Achse. Ist k der Abstand des Punktes P von g, so ist die Gleichung des geometrischen Ortes:

$$y^2 = 2k\left(x - \frac{k}{2}\right).$$

Die Gerade g ist die Direktrix, der Punkt P der Brennpunkt der Parabel.

102. Ist g die Y-Achse, das von P darauf gefällte Lot die X-Achse, so erhält man:

$$y^2 = 4kx.$$

Die Gerade g ist die Scheiteltangente, der Punkt P der Brennpunkt.

103. Die Grundlinie a möge mit der X-Achse, der links liegende Endpunkt mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammenfallen, dann ist die Gleichung des geometrischen Ortes

$$y^2 = 2ax - a^2,$$

oder

$$y^2 = -2ax + a^2.$$

104. Es möge die Gerade g Y-Achse sein, das von der festen Spitze auf diese gefällte Lot die X-Achse, dann ist die Gleichung des geometrischen Ortes

$$y^2 = 2rx - r^2 + \frac{c^2}{4}.$$

105. Durch Elimination von A, B, C aus den Relationen

$$x = \frac{c \cdot \cos A \cdot \sin B}{\sin C}, \quad y = \frac{c \cdot \cos A \cdot \cos B}{\sin C},$$

$$J = \frac{c^2 \cdot \sin A \cdot \sin B}{2 \sin C}$$

erhält man

$$cx(c - x) = Jy.$$

Die Scheiteltangente läuft der X-Achse parallel, die Koordinaten des Scheitels sind $x_1 = \frac{c}{2}$, $y_1 = \frac{c^3}{4J}$.

106. Der Schwerpunkt beschreibt die Parabel

$$y^2 = \frac{p}{3} x - \frac{pc}{9}.$$

Der Parameter ist gleich $\frac{p}{3}$, der Scheitel liegt um $\frac{c}{3}$ vom Scheitel der Fundamentalparabel entfernt.

107. Die Gleichung des geometrischen Ortes ist

$$3y - m(3x - c) + n(3x - c)^2 = 0.$$

Die Kurve ist eine Parabel. Welches sind die Koordinaten des Scheitels? Welches ist die Gleichung der Direktrix?

108. Ist g die X-Achse, das von P auf g gefällte Lot die Y-Achse, so besitzt die Gleichung des geometrischen Ortes die Gestalt

$$x^2 = 2ry - (r^2 - d^2),$$

wenn r der Abstand des Punktes P von der Geraden g ist. Die Achse der Parabel fällt mit der Y-Achse zusammen.

109. Die Gleichung ist

$$y^2 = 2rx - r^2.$$

Die Parabel hat die Y-Achse zur Direktrix, den Kreismittelpunkt zum Brennpunkte und den vertikalen Durchmesser zum Parameter.

110. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, da die zu konstruierenden Kreise den gegebenen Kreis ausschließend oder einschließend berühren können. Im ersten Falle ist die Gleichung des Ortes

$$y^2 = 2(a + r)x + r^2 - a^2,$$

im zweiten Falle

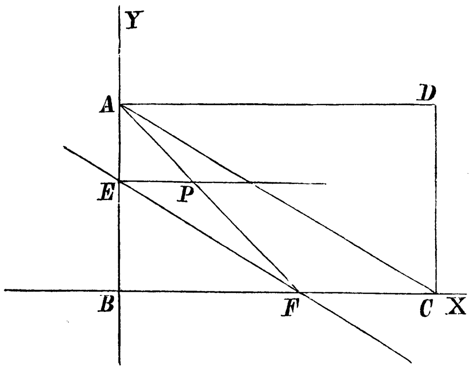
$$y^2 = 2(a - r)x + r^2 - a^2.$$

Die Koordinaten der Scheitel sind: $\frac{a - r}{2}$, 0 und $\frac{a + r}{2}$, 0.

111. $y^2 = 2ax + r^2 - a^2$. Die Koordinaten des Scheitels sind $\frac{a^2 - r^2}{2a}$, 0; die Gleichung der Direktrix $x + \frac{r^2}{2a} = 0$.

112. Fällt $BC = q$ mit der X-Achse, $AB = p$ mit der Y-Achse zusammen (s. Fig. 2), so ist die Gleichung des geometrischen Ortes

Fig. 2.



$$qy^2 + p^2x - pqy = 0.$$

Die Achse läuft der X-Achse parallel, der Parameter ist gleich $\frac{p^2}{q}$, die Koordinaten des Scheitels sind $\frac{q}{4}$, $\frac{p}{2}$.

113. $y^2 = -\frac{4r^2}{p}x$, $x = 0$.

Der geometrische Ort besteht aus einer Parabel und der Scheiteltangente derselben. Die Parabel breitet sich symmetrisch zum negativen Teile der X-Achse aus.

114a. Determination. Man erhält zwei Lösungen, da sich zwei Direktrixen konstruieren lassen.

114b. Determination. Die Tangente darf der Achse nicht parallel laufen. Es ergiebt sich nur eine Parabel.

115. Determination. F muß außerhalb t liegen. Es läßt sich stets nur eine Direktrix konstruieren.

116. Determination. t_1 und t_2 müssen konvergent sein. Es ergiebt sich bei der Konstruktion nur eine Parabel.

117. Man bestimmt zunächst nach der vorhergehenden Lösung Scheiteltangente, Direktrix und Achse. Da die Subtangente gleich der doppelten Abscisse des Berührungspunktes ist, so lassen sich die Berührungspunkte von t_1 und t_2, sowie die zugehörigen Brennstrahlen leicht finden. Beschreibt man um den Brennpunkt mit der halben Summe dieser Brennstrahlen einen Kreis, so schneidet dieser eine Parallele zur Direktrix, deren Abstand gleich dem Radius ist, in zwei Punkten, welche beide der Anforderung genügen.

118a. Beschreibt man um jeden der Punkte P_1 und P_2 mit seinem Abstande von F als Radius einen Kreis, so kann jede der beiden äußeren gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise als Direktrix dienen.

118b. Man findet leicht einen Punkt der Direktrix, deren Richtung mit einer der Tangenten zusammenfällt, die sich von diesem Punkte an den um P mit PF als Radius beschriebenen Kreis ziehen lassen. Im allgemeinen erhält man zwei Lösungen. Wann ergiebt sich nur eine, wann gar keine Lösung der Aufgabe?

119. Der Kreis, welchen man um jeden der gegebenen Punkte mit dem Abstande desselben von der Direktrix beschreibt, ist ein geometrischer Ort des Brennpunktes. Man erhält im allgemeinen zwei Parabeln. Wann ist die Konstruktion der Parabel unmöglich?

120. Determination. Man erhält zwei Parabeln, wenn der um P mit dem Abstande dieses Punktes von d als Radius beschriebene Kreis die Achse a in zwei reellen Punkten schneidet, eine Parabel, wenn der Kreis von a berührt wird, keine Parabel, wenn der Kreis und a keinen reellen Punkt gemein haben.

121. Determination. Die Konstruktion liefert nur einen Brennpunkt, also läßt sich auch nur eine Parabel zeichnen. d und t dürfen nicht rechtwinklig zu einander stehen.

122. Trägt man den Winkel, welchen die Tangente mit der Direktrix einschließt, auf der andern Seite der Tangente an, so erhält man einen geometrischen Ort für den Brennpunkt. Man findet im allgemeinen zwei Punkte, welche der Anforderung der Aufgabe genügen.

123. Die Konstruktion liefert nur einen Punkt. Unlösbar ist die Aufgabe, wenn die Tangente t auf der Direktrix lotrecht steht, unbestimmt, wenn t und s zusammenfallen.

124. Konstruiert man mit Hilfe der Subtangente die Tangente der Parabel im Punkte P, so findet man mit Leichtigkeit einen geometrischen Ort des Brennpunktes.

125. Man findet leicht die Scheiteltangente und mit Hilfe derselben Brennpunkt und Direktrix.

Determination. Es läßt sich nur eine Parabel konstruieren. Unlösbar ist die Aufgabe, wenn a und t parallel sind.

126. Determination. a und t müssen konvergieren. Man erhält nur eine Lösung.

127. Determination. t_1 und t_2 dürfen weder parallel sein noch sich lotrecht durchschneiden. Man erhält im allgemeinen zwei Parabeln. Wann läßt sich nur eine, wann keine Parabel konstruieren?

128. Die Verbindungslinie zwischen dem Schnittpunkte der Tangenten und dem Halbierungspunkte der Berührungssehne läuft der Achse der Parabel parallel. Zieht man durch die Berührungspunkte zu dieser Geraden Parallelen, so schließen diese mit den Tangenten Winkel ein, mit deren Hilfe man zwei geometrische Örter für den Brennpunkt finden kann.

Determination. Die Tangenten dürfen nicht parallel sein. Man erhält nur einen Brennpunkt und eine Direktrix.

129. Determination. Es läßt sich nur eine Parabel konstruieren. Welche gegenseitige Lage dürfen t_1, t_2, t_3 nicht besitzen?

130. Der dem Tangentendreieck umschriebene Kreis ist ein geometrischer Ort des Brennpunktes. Vergl. Aufg. 56.

Determination. Man findet im allgemeinen zwei Parabeln.

131. Die Ordinaten der Punkte P_1 und P_2, nämlich y_1, y_2, sind bekannt. Bezeichnet man den Abstand dieser Linien mit d, so lassen sich die beiden Relationen

$$x_1 = \frac{d}{y_2 + y_1} \cdot \left(\frac{y_1^2}{y_2 - y_1}\right), \quad x_2 = \frac{d}{y_2 + y_1} \left(\frac{y_2^2}{y_2 - y_1}\right)$$

zur Konstruktion der zugehörigen Abscissen verwerten.

Determination. Man findet nur eine Parabel. Die Verbindungslinie der Punkte P_1 und P_2 darf der Achse a weder parallel laufen noch dieselbe rechtwinklig durchschneiden.

132. Legt man um die vier Dreiecke, von denen jedes von drei Tangenten begrenzt wird, die umschriebenen Kreise, so schneiden sich dieselben im Brennpunkte der Parabel.

Determination. Von den vier Tangenten darf keine der anderen parallel sein, außerdem dürfen nicht mehr als zwei durch einen Punkt gehen. Es läßt sich nur eine Parabel konstruieren.

133. Der Scheitel der Parabel liegt im Halbierungspunkte der Höhe. Mit Hilfe der Scheiteltangente findet man Brennpunkt und Direktrix.

134. Lösung 88 liefert das Mittel, die Berührungspunkte auf den Verlängerungen der Dreiecksseiten zu finden. Diese lassen sich zur Konstruktion geometrischer Örter des Brennpunktes verwenden.

135. Durch Konstruktion paralleler Sehnenscharen kann man leicht Tangenten finden und mit Hilfe dieser geometrische Örter für den Brennpunkt.

136. S. die vorhergehende Lösung.

137. Man konstruiert zunächst Normale und Tangente in dem gegebenen Punkte P.

Determination. Es lassen sich zwei Parabeln zeichnen.

138. Ist M der Schnittpunkt der Direktrix und der Polare, so ist der Kreis über PM als Durchmesser ein geometrischer Ort des Brennpunktes. Einen zweiten geometrischen Ort findet man mit Hilfe von Lösung 75b.

139. Die Lösungen 75a und b liefern das Mittel, die Lage von zwei Punkten der Direktrix zu finden.

140. Zieht man durch P eine Parallele zur Achse bis zum Durchschnitt mit p, so findet man leicht einen Punkt der Parabel sowie die Richtung der Tangente in demselben. Die Konstruktion läßt sich demnach auf Lös. 125 zurückführen.

141. $J = \frac{2}{3}\sqrt{p}\,(x_2^{\frac{3}{2}} - x_1^{\frac{3}{2}})$.

Beispiel. $J = 42\frac{8}{9}\,\square$.

142. Segm. $= \frac{p^2}{6}$.

Beispiel. Segm. $= 13{,}5\,\square$.

143. Der Parameter der Parabel ist gleich $\frac{4}{3}a$.

144. Segm. $= \frac{1}{6}\sqrt{p}\,(x_2^{\frac{3}{2}} - x_1^{\frac{3}{2}}) - \frac{1}{2}\sqrt{p\,x_1 x_2}\,(x_2^{\frac{1}{2}} - x_1^{\frac{1}{2}}),$
$= \frac{1}{6}\sqrt{p}\,(x_2^{\frac{1}{2}} - x_1^{\frac{1}{2}})^3.$

Beispiel. Segm. $= 2\frac{2}{3}\,\square$.

145. Segm. $= \frac{1}{6}\cdot\frac{p^2}{\operatorname{tg}^3\alpha}$.

Beispiel. Segm. $= 9{,}846667\ldots\,\square$.

146. $J = \frac{s^2\sqrt{3}}{12}\cdot\square$.

147. Sind (x_1, y_1), (x_2, y_2) die Schnittpunkte der Sehne und der Parabel, so ist der Inhalt des Segmentes

$$J = \frac{x_1 y_1 - x_2 y_2}{6} + \frac{p}{8}(y_1 - y_2),$$

oder

$$= \frac{1}{3}\left\{\frac{(y_1 - y_2)\left(x_1 + x_2 + \frac{p}{2}\right)}{2}\right\},$$

d. h. der Inhalt des Segmentes ist gleich dem dritten Teile des Trapezes, welches von der Direktrix, der Parabelsehne und den Loten, welche von den Endpunkten der letzteren auf die erstere sich fällen lassen, begrenzt ist.

Beispiel. $J = \frac{49\sqrt{2}}{3} = 23{,}0988\ldots\,\square$.

148. Es ist $F_1 = \frac{p^2}{12}$, $F_2 = \frac{5}{6}p^2$, also

$$F_1 : F_2 = 1 : 10.$$

149. Man findet: Segm. $= \frac{1}{6}\sqrt{p}\,(x_2^{\frac{1}{2}} - x_1^{\frac{1}{2}})^3$,
Parallelogr. $= \frac{1}{4}\sqrt{p}\,(x_2^{\frac{1}{2}} - x_1^{\frac{1}{2}})^3$.

Demnach ergiebt sich

$$\text{Parallelogr.} : \text{Segm.} = 3 : 2.$$

150. Eine einfache geometrische Betrachtung führt zu dem Resultate: Das von den Tangenten und dem Parabelbogen eingeschlossene Flächenstück ist halb so groß als das zugehörige Segment der Parabel.

151. Segm. $= 24{,}97408\ldots\,\square$.

152. $J = 193\,\square$.

153. Man erhält

$$F_1 = F_2 = \frac{p^2\,(8\pi - 9\sqrt{3})}{6} = 1{,}590723\,p^2,$$

$$F_3 = \frac{p^2\,(4\pi + 9\sqrt{3})}{3} = 9{,}3849234\,p^2.$$

154. Es ist

$$F_1 = p^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}\right), \qquad F_2 = p^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}\right),$$

also $F_1 : F_2 = 3\pi + 2 : 3\pi - 2$.

155. $J = \frac{1}{3}p^2$.

156. $J = \frac{p^2\sqrt{2}}{6}$.

157. $\text{Sect.} = \frac{1}{3}\left\{\frac{\frac{1}{2}p + r_2}{2}\,r_2 \sin\varphi_2 - \frac{\frac{1}{2}p + r_1}{2}\,r_1 \sin\varphi_1\right\}$.

Beispiel. Sect. $= 124{,}401 \ldots \square$.

158. Die gesuchte Winkelentfernung des Kometen vom Perihel beträgt

$$90^0\ 11'\ 3'';$$

er erreicht dieselbe nach Verlauf von

677,053 Tagen.

Man benutzt den Satz: Der Radiusvektor beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume.

Die Ellipse.

159. Die Gleichung des geometrischen Ortes ist

$$a^2y^2 + (a^2 - e^2)\,x^2 = a^2\,(a^2 - e^2),$$

oder wenn $a^2 - e^2 = b^2$ gesetzt wird,

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

160. $25\,y^2 + 9\,x^2 = 225$.

161. $169\,y^2 + 25\,x^2 = 4225$.

162. $225\,y^2 + 144\,x^2 = 32400$.

163. Die Gleichung der Ellipse ist

$$\frac{y_1^2x_2^2 - y_2^2x_1^2}{y_1^2 - y_2^2}\,y^2 + \frac{x_1^2y_2^2 - x_2^2y_1^2}{x_1^2 - x_2^2}\,x^2 = \left\{\frac{y_1^2x_2^2 - y_2^2x_1^2}{y_1^2 - y_2^2} \cdot \frac{x_1^2y_2^2 - x_2^2y_1^2}{x_1^2 - x_2^2}\right\}.$$

Beispiel. $252\,y^2 + 115\,x^2 = 4140$.

164. $49y^2 - 686y + 16x^2 - 128x + 1873 = 0.$

165. Die Koordinaten des Mittelpunktes sind:

$$x_1 = -2, \quad y_1 = 1;$$

die Achsen: $$2a = 8, \quad 2b = 6;$$

die Koordinaten der Brennpunkte:

$$x_{\frac{2}{3}} = -2 \pm \sqrt{7}, \quad y_{\frac{2}{3}} = 1.$$

166. Es ist $y_1{}^2 : y_2{}^2 = (a + x_1)(a - x_1) : (a + x_2)(a - x_2)$, d. h. die Quadrate der Ordinaten verhalten sich wie die Rechtecke aus den Abschnitten, welche dieselben auf der Hauptachse bilden.

167. Der Parameter ist $p = \frac{6}{7}\sqrt{6}$, die numerische Excentricität

$$\varepsilon = \tfrac{2}{7}\sqrt{7}.$$

168. $x = y = \pm \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$

Ist s die Sehne, welche zwei Endpunkte der Achsen verbindet, so läßt sich die Proportion $s : a = b : x$ zur Konstruktion verwenden.

169. Die Gleichungen der Brennstrahlen sind:

$$y(x_1 - e) = y_1(x - e), \quad y(x_1 + e) = y_1(x + e);$$

die Längen derselben:

$$r_1 = a - \frac{e}{a}x_1, \quad r_2 = a + \frac{e}{a}x_1.$$

Beispiel. $x = 8; \quad 4y = 0{,}9\,(x + 8),$

$$r_1 = 3{,}6, \quad r_2 = 16{,}4.$$

170. $\angle \varphi = 83^0\, 6'\, 28{,}4''.$

171. Man erhält vier Punkte der Ellipse, deren Koordinaten sind:

$$x = \pm \frac{a}{e}\sqrt{a^2 - \tfrac{9}{4}b^2}, \quad y = \pm \frac{b^2}{2e}\sqrt{5}.$$

Die Lösung der Aufgabe ist nur möglich, wenn $a \geqq \frac{3}{2}b$ ist.

172. $9y^2 + 8x^2 = 8a^2.$

173. $y^2 = \dfrac{2b^2}{a}x - \dfrac{b^2}{a^2}x^2$ oder $y^2 = px - qx^2.$

174. Es existieren zwei Punkte, deren Abscissen sind:

$$x_1 = 1\tfrac{1}{5}, \quad x_2 = 10\tfrac{4}{5}.$$

175. $2a = 18, \quad 2b = 10.$

176. $y^2 = 5x - \frac{25}{144}x^2.$

177. $2a = \dfrac{y_1^2 x_2^2 - y_2^2 x_1^2}{y_1^2 x_2 - y_2^2 x_1}$, $2b = \dfrac{y_1^2 x_2^2 - y_2^2 x_1^2}{\sqrt{x_1 x_2 (x_2 - x_1)(y_1^2 x_2 - y_2^2 x_1)}}$.

Beispiel. $2a = 8$, $\quad 2b = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

178. $r = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}$ oder $r = \dfrac{ab}{\sqrt{b^2 + e^2 \sin^2 \varphi}}$;

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

179. Wählt man den links liegenden Brennpunkt zum Pol, so erhält man

$$\varrho = \frac{a^2 - e^2}{a - e \cos \varphi} \quad \text{oder} \quad \varrho = \frac{\frac{1}{2} p}{1 - \varepsilon \cos \varphi};$$

nimmt man dagegen den rechts liegenden Brennpunkt als Pol an, so ergiebt sich

$$\varrho = \frac{a^2 - e^2}{a + e \cos \varphi} \quad \text{oder} \quad \varrho = \frac{\frac{1}{2} p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

180. Die Differenz der Anomalien ist gleich 180^0; man erhält demnach

$$\varrho_1 = \frac{\frac{1}{2} p}{1 - \varepsilon \cos \varphi_1}, \quad \varrho_2 = \frac{\frac{1}{2} p}{1 + \varepsilon \cos \varphi_1},$$

daher ist

$$\varrho_1 \cdot \varrho_2 = \frac{p^2}{4(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi_1)}$$

und

$$\varrho_1 + \varrho_2 = \frac{p}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi_1},$$

also

$$\varrho_1 \cdot \varrho_2 = \frac{p}{4} \cdot (\varrho_1 + \varrho_2),$$

d. h. das Rechteck aus den Abschnitten einer Brennpunktsehne ist gleich dem aus der ganzen Sehne und dem vierten Teile des Parameters.

181. Nach der vorhergehenden Lösung findet man leicht

$$\varrho_1 \cdot \varrho_2 : \varrho_1^1 \cdot \varrho_2^1 = \varrho_1 + \varrho_2 : \varrho_1^1 + \varrho_2^1.$$

182. Man findet leicht

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{4}{p}.$$

183. $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2a}$.

184. Ist $\varrho = \frac{\frac{1}{2}p}{1 - \varepsilon \cos\varphi}$ die Gleichung der Ellipse, so ist

$$\cos\varphi = \tfrac{5}{6}, \quad \text{also} \quad \angle\varphi = 33^0\,33'\,26{,}4''.$$

185. 52150 Meilen.

186. $\varepsilon = 0{,}0168$.

187. Die Koordinaten der Schnittpunkte sind:

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{-Mna^2 \pm ab\sqrt{a^2M^2 + b^2 - n^2}}{a^2M^2 + b^2},$$

$$y_{\frac{1}{2}} = \frac{nb^2 \pm Mab\sqrt{a^2M^2 + b^2 - n^2}}{a^2M^2 + b^2}.$$

Beispiele.

a) $x_{\frac{1}{2}} = \frac{875 \pm 20\sqrt{145}}{629}$, $\quad y_{\frac{1}{2}} = \frac{-28 \pm 100\sqrt{145}}{629}$.

b) $x_{\frac{1}{2}} = 4\tfrac{4}{5}$, $\quad y_{\frac{1}{2}} = -3$.

c) $x_{\frac{1}{2}} = \frac{-198 \pm 2i\sqrt{1895}}{43}$, $\quad y_{\frac{1}{2}} = \frac{77 \pm 4i\sqrt{1895}}{43}$.

188. Setzt man $M = \operatorname{tg}\varphi$, so läßt sich die Relation auf die Form bringen

$$a^2 \gtreqless e^2\cos^2\varphi + n^2\cos^2\varphi,$$

d. h. die Gerade schneidet die Ellipse in zwei reellen Punkten, wenn der Fußpunkt des von einem Brennpunkte auf die Gerade gefällten Lotes in der Fläche des Hauptkreises, in zwei imaginären Punkten, wenn der Fußpunkt des Lotes außerhalb der Kreisfläche liegt. Die Gerade wird dagegen Tangente der Ellipse, wenn der Fußpunkt des Lotes in die Peripherie des Hauptkreises fällt.

189. $a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = 0$.

190. Die Achsenabschnitte, welche von den Loten, die auf einer Sehne stehen, gebildet werden, sind:

$$-\frac{1}{u} = \pm\sqrt{a^2(1 + \operatorname{tg}^2\varphi) - e^2\operatorname{tg}^2\varphi},$$

$$-\frac{1}{v} = \pm\frac{\sqrt{a^2(1 + \operatorname{tg}^2\varphi) - e^2\operatorname{tg}^2\varphi}}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Daraus erhält man durch Elimination von tg φ

$$a^2u^2 + (a^2 - e^2)\, v^2 - 1 = 0.$$

Die Enveloppe ist eine Ellipse.

191. Eliminiert man aus den Relationen

$$-\frac{1}{u} = \sqrt{r^2 + (r^2 - e^2)\,\mathrm{tg}^2\,\varphi}, \qquad -\frac{1}{v} = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\varphi}\sqrt{r^2 + (r^2 - e^2)\,\mathrm{tg}^2\,\varphi}$$

tg φ, so erhält man die Gleichung der einhüllenden Kurve

$$r^2u^2 + (r^2 - e^2)\, v^2 - 1 = 0.$$

192. Mit Hilfe von $-\frac{1}{u} = k$ und $-\frac{1}{v} = \frac{ak}{\sqrt{f^2 + k^2 - a^2}}$ findet man durch Elimination von k

$$a^2v^2 + u^2\,(a^2 - f^2) - 1 = 0.$$

Für $a = f$ erhält man $a^2v^2 - 1 = 0$. Welche Bedeutung hat diese Gleichung?

193. Die X-Achse wird in den Punkten $x_1 = 9\frac{2}{5}$ und $x_2 = -3\frac{2}{5}$, die Y-Achse in den Punkten $y_{\frac{1}{2}} = 2 \pm \frac{\sqrt{995}}{7}$ geschnitten.

194. Die Koordinaten der Schnittpunkte sind:

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{68 \pm 12\sqrt{21}}{25}, \qquad y_{\frac{1}{2}} = \frac{9 \pm 6\sqrt{21}}{25}.$$

195. Man erhält

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{2028 \pm 325\sqrt{2}}{194}, \qquad y_{\frac{1}{2}} = \frac{-300 \pm 325\sqrt{2}}{194};$$

oder

$$x_{\frac{3}{4}} = -\frac{2028 \pm 325\sqrt{2}}{194}, \qquad y_{\frac{3}{4}} = \frac{300 \mp 325\sqrt{2}}{194}.$$

196. Man erhält zwei Sehnen, welche der Gleichung

$$\pm 2\sqrt{10}\, y = 3x + 3\sqrt{91}$$

entsprechen.

197. Die beiden Tangenten entsprechen der Gleichung

$$y = \frac{7 \pm \sqrt{31}}{6}\, x.$$

198. Die Gleichung der Verbindungslinie ist:

$$\frac{y}{5} + \frac{x}{7} = \sqrt{5} - 2,$$

die Koordinaten der Teilpunkte:

$$x_{\frac{1}{2}} = \tfrac{7}{2}\left\{\sqrt{5} - 2 \pm \sqrt{4\sqrt{5} - 7}\right\}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \tfrac{5}{2}\left\{\sqrt{5} - 2 \mp \sqrt{4\sqrt{5} - 7}\right\}.$$

199. Die Gleichungen der Seiten sind:

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

der Inhalt ist $= \dfrac{4\,a^2 b^2}{a^2 + b^2}$.

200. a) $x_{\frac{1}{2}} = \dfrac{a\,(3\,b^2 - a^2)}{3\,b^2 + a^2}, \qquad y_{\frac{1}{2}} = \pm \dfrac{2\sqrt{3}\,ab^2}{3\,b^2 + a^2};$

b) $x_{\frac{3}{4}} = \dfrac{a\,(ae - 2\,b^2\sqrt{3})}{3\,b^2 + a^2}, \quad y_{\frac{3}{4}} = \pm \dfrac{b^2\,(2\,a\sqrt{3} + 3\,e)}{\sqrt{3}\,(3\,b^2 + a^2)}.$

201. $x_{\frac{1}{2}} = \dfrac{15\sqrt{43}}{26}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \pm \tfrac{51}{26};$

$x_{\frac{3}{4}} = -\dfrac{15\sqrt{43}}{26}, \quad y_{\frac{3}{4}} = \pm \tfrac{51}{26}.$

202. Die Koordinaten der Ecken sind:

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{a}{2}\sqrt{2}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \pm \frac{b}{2}\sqrt{2};$$

$$x_{\frac{3}{4}} = -\frac{a}{2}\sqrt{2}, \quad y_{\frac{3}{4}} = \mp \frac{b}{2}\sqrt{2}.$$

203. Die Gleichungen der Seiten sind:

$$x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

204. $a^2 y_1 y + b^2 x_1 x = a^2 b^2$.

Beispiele. a) $4\,x + y = 10;$

b) $\pm 3\sqrt{3}\,y - 2\,x = 12.$

205. $5\,(10 - 3\sqrt{3})\,y + (15 + 32\sqrt{3})\,x = 730.$

206. Die Gleichung der Normale ist:

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1),$$

die Abschnitte auf den Achsen:

$$\frac{e^2 x_1}{a^2}, \quad -\frac{e^2 y_1}{b^2}.$$

Beispiel. $2\sqrt{5}\,y + 5x - 7 = 0;\quad \frac{7}{5},\ \frac{7}{2\sqrt{5}}.$

207. $\mathrm{Tg} = \frac{y_1}{b x_1}\sqrt{a^4 - e^2 x_1{}^2} = \frac{a y_1}{b x_1}\sqrt{r_1 r_2};$

$$\mathrm{N} = \frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 - e^2 x_1{}^2} = \frac{b}{a}\sqrt{r_1 r_2};$$

$$\mathrm{Sbtg} = \frac{a^2 y_1{}^2}{b^2 x_1};\qquad \mathrm{Sbn} = \frac{b^2 x_1}{a^2}.$$

Beispiel. Tg = 2,55, N = 1,36, Sbtg = 2,25, Sbn = 0,64.

208. $\mathrm{tg}\,\varphi_1 \,.\, \mathrm{tg}\,\varphi_2 = -\frac{b^2}{a^2}.$

209. $x_{\frac{1}{2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}},\qquad y_{\frac{1}{2}} = \pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}};$

$$x_{\frac{3}{4}} = -\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}},\qquad y_{\frac{3}{4}} = \mp\frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

210. Man findet als Gleichung des geometrischen Ortes

$$\{y^2 + (x - e)^2\}\{y^2 + x^2 - a^2\} = 0,$$

oder

$$y^2 + (x - e)^2 = 0,\quad y^2 + x^2 - a^2 = 0.$$

Der ersten Gleichung entspricht der Brennpunkt $(e, 0)$, der zweiten der Hauptkreis der gegebenen Ellipse.

211. $x^2(a^2y^2 + b^2x^2)(y^2 + x^2 - a^2) = 0.$

Der geometrische Ort ist der Hauptkreis. Setzt man die ersten Faktoren gleich Null, so entspricht den Gleichungen die Y-Achse und der Koordinatenanfangspunkt.

212. Es ist

$$\begin{vmatrix} 0 & y_1 & \dfrac{2a^2b^2y_1(a^2 - ex_1)}{a^4y_1{}^2 + b^4x_1{}^2} \\ -e & x_1 & \dfrac{2a^2b^4x_1 + a^4ey_1{}^2 - b^4ex_1{}^2}{a^4y_1{}^2 + b^4x_1{}^2} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

213. Die Winkel sind einander gleich. Die Richtigkeit folgt aus der Lösung 212.

214. Die Gleichung des geometrischen Ortes ist

$$y^2 + (x + e)^2 = 4a^2,$$

d. h. die Gegenpunkte liegen auf der Peripherie eines Kreises, der den andern Brennpunkt zum Mittelpunkte und die Hauptachse der Ellipse zum Radius hat.

215. α) Die Subtangenten sind gleich.

β) $\underset{k}{\mathrm{Sbn}} : \underset{e}{\mathrm{Sbn}} = a^2 : b^2$.

216. Man verlängert die Ordinate des Berührungspunktes bis zum Schnitt mit dem Hauptkreise und legt in diesem Punkte an den Hauptkreis eine Tangente. Der Schnittpunkt dieser Tangente und der X-Achse ist ein zweiter Punkt der Tangente, welche an die Ellipse zu legen ist.

217. Beschreibt man über dem Abstande des gegebenen Punktes P von einem Brennpunkte als Durchmesser einen Kreis, so schneidet dieser den Hauptkreis der Ellipse in einem zweiten Punkte der Tangente.

Determination. Man erhält im allgemeinen zwei Tangenten. Wann ergiebt sich nur eine Tangente? Weshalb ist die Lösung der Aufgabe unmöglich, wenn der Punkt P in der Fläche der Ellipse liegt?

218. Man erhält zwei Tangenten, welche der Gleichung

$$3y - 4x = \pm\sqrt{107}$$

entsprechen.

219. Die Koordinaten der Berührungspunkte sind bestimmt durch die Gleichungen

$$36y_1^2 + 25x_1^2 = 900, \quad 36y_1 + 25\sqrt{3}\,x_1 = 0,$$

also

$$x_{\frac{1}{2}} = \pm\frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{37}}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \mp\frac{25}{\sqrt{37}}.$$

220. Es giebt vier Tangenten, welche den Anforderungen der Aufgabe genügen. Dieselben entsprechen den Gleichungen:

$$\pm\tfrac{3}{2}\sqrt{\frac{-13+3\sqrt{41}}{2}}\,y + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{21-3\sqrt{41}}{2}}\,x = 3,$$

$$\pm\tfrac{3}{2}\sqrt{\frac{-13+3\sqrt{41}}{2}}\,y - \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{21-3\sqrt{41}}{2}}\,x = 3.$$

221. $\angle\varphi = 127^0\,59'\,53{,}4''$.

222. Man findet vier Punkte, deren Koordinaten sind:

$$x_{\frac{1}{2}} = +\frac{a}{\sqrt{2}}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \pm\frac{b}{\sqrt{2}},$$

$$x_{\frac{3}{4}} = -\frac{a}{\sqrt{2}}, \quad y_{\frac{3}{4}} = \mp\frac{b}{\sqrt{2}}.$$

223. Das Rechteck ist gleich dem Quadrate über der kleineren Halbachse.

224. Das Rechteck aus beiden Loten ist gleich dem Quadrate über der kleineren Halbachse.

225. Das Resultat ergiebt sich mit Hilfe von Lösung 213.

226. Die Abschnitte verhalten sich wie e^2 zu b^2.

227. Es ist $N_{(x)} = \frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 - e^2 x_1{}^2}$, $N_{(y)} = \frac{1}{b}\sqrt{a^4 - e^2 x_1{}^2}$, also

$$N_{(x)} : N_{(y)} = b^2 : a^2.$$

228. Man erhält

$$\alpha)\ \frac{a^2 b^2}{x_1 y_1}, \quad \beta)\ \frac{e^4 x_1 y_1}{a^2 b^2}.$$

229. Die Gleichung des Kreises ist

$$x^2 + \left(y - \frac{b^2}{y_1}\right)^2 = \frac{a^4 y_1{}^2 + b^4 x_1{}^2}{a^2 y_1{}^2};$$

die X-Achse wird von demselben in den Brennpunkten der Ellipse geschnitten.

230. Der Kreis schneidet die Hauptachse in den beiden Brennpunkten; die Gleichung desselben ist

$$x^2 + \left(y - \frac{b^4 - e^2 y_1{}^2}{2 b^2 y_1}\right)^2 = \left(\frac{b^4 + e^2 y_1{}^2}{2 b^2 y_1}\right)^2.$$

231. Der von den Tangenten eingeschlossene Winkel ist bestimmt durch die Relation

$$\cos\vartheta = \frac{a^4 y_1 y_2 + b^4 x_1 x_2}{\sqrt{a^4 y_1{}^2 + b^4 x_1{}^2}\sqrt{a^4 y_2{}^2 + b^4 x_2{}^2}},$$

die Verbindungslinie entspricht der Gleichung

$$a^2 (y_1 - y_2)\, y + b^2 (x_1 - x_2)\, x = 0.$$

Beispiel. $\angle\vartheta = 135^0\, 55'\, 49''$;

$$3\,(4\sqrt{2} + 2\sqrt{5})\, y - 4x = 0.$$

232. Nach der vorhergehenden Lösung findet man

$$y_1 y_2 : x_1 x_2 = b^4 : -a^4.$$

233. Mit Hilfe der Gleichungen

$$a^2 y_1{}^2 + b^2 x_1{}^2 = a^2 b^2, \qquad a^2 y_2{}^2 + b^2 x_2{}^2 = a^2 b^2,$$
$$a^2 y_1 y + b^2 x_1 x = a^2 b^2, \qquad a^2 y_2 y + b^2 x_2 x = a^2 b^2,$$
$$a^4 y_1 y_2 + b^4 x_1 x_2 = 0$$

erhält man durch Elimination von x_1, y_1, x_2, y_2 die Gleichung des geometrischen Ortes

$$y^2 + x^2 = a^2 + b^2.$$

234 α. Wird der Kreis im Punkte (x_1, y_1), die Ellipse im Punkte (x_2, y_2) berührt, so müssen die Koordinaten der Berührungspunkte den Relationen

$$b^2 x_2 y_1 = a^2 x_1 y_2, \quad b y_1 = a y_2$$

genügen. Daraus findet man die Gleichungen:

$$\pm a \sqrt{\frac{b}{a+b}}\, y + b \sqrt{\frac{a}{a+b}}\, x = ab,$$

$$\mp a \sqrt{\frac{b}{a+b}}\, y - b \sqrt{\frac{a}{a+b}}\, x = ab.$$

Der Kreis und die Ellipse haben demnach vier gemeinschaftliche Tangenten.

234 β. $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{a-b}{\sqrt{ab}}$.

235 α. Die Koordinaten des Berührungspunktes der Parabel (x_1, y_1) und die des Berührungspunktes der Ellipse (x_2, y_2) genügen den Relationen

$$8\sqrt{3}\, a y_2 + x_2 y_1 = 0, \quad 2\sqrt{3}\, x_1 y_2 - a y_1 = 0.$$

Man erhält demnach die beiden Gleichungen

$$2y - \sqrt{3}\, x = 4a \quad \text{und} \quad 2y + \sqrt{3}\, x = -4a.$$

Die Ellipse und die Parabel besitzen also nur zwei gemeinschaftliche Tangenten.

235 β. $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{2}{\sqrt{14\sqrt{3} - 24}}$, also $\angle \varphi = 76^0\, 1'\, 4''$.

236. Die beiden Tangenten entsprechen der Gleichung

$$y - y_1 = \frac{-y_1 x_1 \pm \sqrt{a^2 {y_1}^2 + b^2 {x_1}^2 - a^2 b^2}}{a^2 - {x_1}^2}\,(x - x_1).$$

Daraus folgt: Die beiden Tangenten sind nur dann reell, wenn der gegebene Punkt außerhalb der Ellipse liegt, sie fallen zusammen, wenn der Punkt der Ellipse angehört, sie sind imaginär, wenn der Punkt in der Fläche der Ellipse liegt.

Der von den Tangenten eingeschlossene Winkel ist bestimmt durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\sqrt{a^2 {y_1}^2 + b^2 {x_1}^2 - a^2 b^2}}{{x_1}^2 + {y_1}^2 - (a^2 + b^2)}.$$

Beispiel. $39y + (24 \mp \frac{25}{2}\sqrt{3})x = 309 \mp 100\sqrt{3}$.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{100\sqrt{3}}{167}, \quad \angle\varphi = 46^0\,2'\,42''.$$

237. $39y + (25\sqrt{3} \mp 2\sqrt{849})x = 160\sqrt{3} \mp 5\sqrt{849}$.

238. $a^2y_1y + b^2x_1x = a^2b^2$.

Beispiele. a) $63y + 20x = 36$.

b) $-4\sqrt{7}y + 9x = 96$ (die Polare ist Tangente der Ellipse).

c) $55y + 24x = 40$.

239. $x = \frac{a^2}{e}$, $x = -\frac{a^2}{e}$; jede dieser beiden Parallelen wird eine Direktrix der Ellipse genannt.

240. Die beiden Geraden durchschneiden sich rechtwinklig.

241. Der Brennstrahl r ist gleich $a - \frac{e}{a}x_1$, der Abstand d des Punktes von der Direktrix gleich $\frac{a^2}{e} - x_1$; daraus folgt:

$$r_1 : d = e : a.$$

242. Man erhält als Gleichung des geometrischen Ortes

$$n^2y^2 + (n^2 - m^2)x^2 - 2n^2kx + n^2k^2 = 0,$$

d. h. der Ort ist eine Ellipse, welche den Punkt $(k, 0)$ zum Brennpunkte und die Y-Achse zur Direktrix hat.

243. Die beiden Strecken sind einander gleich.

244. $y = \frac{y_1}{x_1}x$. Die Gerade geht durch den Mittelpunkt der Ellipse. Der Halbierungspunkt wird auch dann noch reell sein, wenn die Schnittpunkte der Ellipse und der Polare imaginär sind.

245. Man bestimmt die Lage der Polare leicht mit Hilfe der Achsenabschnitte $\frac{a^2}{x_1}$ und $\frac{b^2}{y_1}$.

246. Die Koordinaten des Poles sind:

$$x_1 = -\frac{La^2}{N}, \quad y_1 = -\frac{Mb^2}{N}.$$

Beispiele. a) $x_1 = 5\frac{1}{3}$, $y_1 = 2$;

b) $x_1 = \frac{4}{5}$, $y_1 = 3\frac{4}{7}$.

247. Errichtet man im Brennpunkte auf der Sehne ein Lot, so schneidet dieses die Direktrix, welche zu dem Brennpunkte gehört, in dem gesuchten Pole.

248. Verbindet man den Punkt P mit dem Brennpunkte F und errichtet auf dieser Verbindungslinie in F ein Lot, so schneidet dieses die Direktrix d in einem zweiten Punkte der Tangente.

249. Die Gleichungen der Geraden sind:

$$y_1 y + (x_1 - e)\, x - e\,(x_1 - e) = 0,$$
$$a^2 y_1 y + b^2 x_1 x - a^2 b^2 = 0,$$
$$ex - a^2 = 0.$$

Da die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 - e & b^2 x_1 & e \\ y_1 & a^2 y_1 & 0 \\ -e\,(x_1 - e) & -a^2 b^2 & -a^2 \end{vmatrix} = 0$$

ist, so müssen die drei Geraden durch einen Punkt gehen.

250. Die Gerade KF entspricht der Gleichung

$$b^2 x_1 y - a^2 y_1 (x - e) = 0;$$

sie schneidet demnach die Polare des Punktes P rechtwinklig.

251. Die Gleichung des geometrischen Ortes ist

$$a^4 y^2 + b^4 x^2 = a^2 b^4,$$

d. h. die Pole liegen auf einer Ellipse, deren Halbachsen a und $\frac{b^2}{a}$ sind.

252. Der Pol rückt auf der Ellipse $a^4 y^2 + b^4 x^2 = a^4 b^2$ fort, welche die Fundamentalellipse in den Endpunkten der kleinen Achse berührt.

253. Die Pole liegen auf der Ellipse

$$\frac{a^2 + b^2}{a^4}\, x^2 + \frac{a^2 + b^2}{b^4}\, y^2 = 1.$$

254. Unter Anwendung von Linienkoordinaten findet man als Gleichungen der Enveloppen:

$$\alpha)\quad a^2 u^2 + \frac{b^4}{a^2}\, v^2 - 1 = 0,$$

$$\beta)\quad \frac{a^4}{b^2}\, u^2 + b^2 v^2 - 1 = 0,$$

$$\gamma)\quad \frac{a^4}{a^2 + b^2}\, u^2 + \frac{b^4}{a^2 + b^2}\, v^2 - 1 = 0.$$

In welcher Beziehung stehen diese Resultate zu den in den drei vorhergehenden Aufgaben gefundenen?

255. Die Pole liegen auf einer Geraden, welche der Y-Achse parallel läuft; die Gleichung derselben ist $a^2 L + Nx = 0$.

256. Der geometrische Ort des Poles ist die Gerade

$$LNy - MNx - LMe^2 = 0.$$

257. Die Polaren bilden ein Büschel, dessen Mittelpunkt der Punkt $\left(\frac{a^2}{x_1}, 0\right)$ ist.

258. Schließt die von dem Mittelpunkte der Ellipse nach dem unendlich fernen Punkte P gerichtete Gerade mit der Hauptachse den Winkel φ ein, so ist die Gleichung der Polare

$$a^2 y \sin\varphi + b^2 x \cos\varphi = 0 \quad \text{oder} \quad y = -\frac{b^2}{a^2 \operatorname{tg}\varphi}\, x.$$

259. Jede dieser parallelen Sehnen wird durch den konjugierten Durchmesser halbiert. Vergl. Lösung 80.

260. $y = -\frac{b^2}{a^2 A}\, x + \gamma$. ($\gamma$ kann jeden beliebigen reellen Wert besitzen.)

261. $y = -\frac{b^2}{a^2 M}\, x$.

262. $33y + 26x - 92 = 0$.

263. Die Gleichung der Sehne ist $2y + x = 8$, die des konjugierten Durchmessers $y = \frac{1}{2}x$.

264. Die Gleichung des gesuchten Durchmessers ist

$$45y + 8x = 0,$$

derselbe schneidet die Ellipse in den Punkten

$$x_{\frac{1}{2}} = \pm \frac{45}{\sqrt{151}}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \mp \frac{8}{\sqrt{151}},$$

während die Endpunkte des konjugierten Durchmessers

$$x_{\frac{3}{4}} = \pm 4\sqrt{\frac{15}{151}}, \quad y_{\frac{3}{4}} = \pm 6\sqrt{\frac{15}{151}}$$

sind.

265. Man zieht zu dem Durchmesser eine parallele Sehne, halbiert dieselbe und verbindet den Halbierungspunkt mit dem Mittelpunkte der Ellipse.

266. Man zieht zwei parallele Sehnen, verbindet deren Halbierungspunkte und wiederholt diese Konstruktion.

267. Der Durchmesser, welcher einer der beiden Sehnen parallel läuft, halbiert die andere.

268. Über einem beliebigen Durchmesser d der Ellipse als Sehne beschreibt man einen Kreis, welcher den gegebenen Winkel als Peripheriewinkel faßt. Verbindet man einen der Schnittpunkte des Kreises und der Ellipse mit den Endpunkten von d, so ist durch diese Sehnen die Richtung der gesuchten konjugierten Durchmesser bestimmt.

269. Die Tangenten entsprechen der Gleichung

$$y = -\frac{b^2}{a^2 M} x \pm \frac{b\sqrt{a^2 M^2 + b^2}}{a M},$$

dagegen der konjugierte Durchmesser der Gleichung

$$y = -\frac{b^2}{a^2 M} x.$$

Die Tangenten sind also dem konjugierten Durchmesser parallel.

270. Zur Konstruktion bieten die Lösungen 265 und 269 das Mittel.

271. Siehe die Bemerkung unter 270.

272. Man findet leicht, daß

$$\frac{\dfrac{-b^2}{a^2 M_1} + \dfrac{b^2}{a^2 M_3}}{\dfrac{-b^2}{a^2 M_1} + \dfrac{b^2}{a^2 M_4}} : \frac{\dfrac{-b^2}{a^2 M_2} + \dfrac{b^2}{a^2 M_3}}{\dfrac{-b^2}{a^2 M_2} + \dfrac{b^2}{a^2 M_4}} = \frac{M_1 - M_3}{M_1 - M_4} : \frac{M_2 - M_3}{M_2 - M_4}$$

ist.

273. Sind $y = 0$, $x = 0$ die Gleichungen der Fundamentalstrahlen, und die für drei Strahlenpaare

$$y - M_1 x = 0, \quad y + \frac{b^2}{a^2 M_1} x = 0,$$

$$y - M_2 x = 0, \quad y + \frac{b^2}{a^2 M_2} x = 0,$$

$$y - M_3 x = 0, \quad y + \frac{b^2}{a^2 M_3} x = 0,$$

so ist die Bedingungsgleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -M_1+\frac{b^2}{a^2M_1} & -M_2+\frac{b^2}{a^2M_2} & -M_3+\frac{b^2}{a^2M_3} \\ -\frac{b^2}{a^2} & -\frac{b^2}{a^2} & -\frac{b^2}{a^2} \end{vmatrix}=0$$

eine identische; das Büschel sonach ein involutorisches.

274. Mit Hilfe der Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -M_1+\frac{b^2}{a^2M_1} & -M_2+\frac{b^2}{a^2M_2} & 2r \\ -\frac{b^2}{a^2} & -\frac{b^2}{a^2} & r^2 \end{vmatrix}=0$$

findet man $r=\pm\frac{bi}{a}$. Die beiden Doppelstrahlen sind also imaginär und entsprechen der Gleichung

$$y\pm\frac{bi}{a}x=0.$$

275. Die gesuchte Gleichung ist

$$a^2u^2+b^2v^2-2=0,$$

d. h. die Enveloppe ist eine Ellipse, deren Halbachsen $\frac{a}{\sqrt{2}}$ und $\frac{b}{\sqrt{2}}$ sind.

276. Es ist

$$2a_1=2ab\sqrt{\frac{1+M^2}{a^2M^2+b^2}},\qquad 2b_1=2\sqrt{\frac{a^4M^2+b^4}{a^2M^2+b^2}}.$$

Beispiel. $2a_1=\frac{42}{37}\sqrt{41}=7{,}26841,$

$$2b_1=\frac{2}{37}\sqrt{61321}=13{,}38545.$$

277. $\operatorname{tg}\varphi=-\frac{a^2b^2}{e^2x_1y_1},\quad \partial=\frac{2}{ab}\sqrt{a^4y_1^2+b^4x_1^2}=2\sqrt{a^2-\varepsilon^2x_1^2}.$

Der Winkel wird ein rechter sein, wenn $e=0$ wird, d. h. wenn die Ellipse in einen Kreis übergeht.

Beispiel. $\angle\varphi=135^0\,13'\,32'',\quad \partial=6{,}8.$

278. Beide Figuren haben denselben Inhalt, nämlich

$$F=a^2-\varepsilon^2x_1^2.$$

279. Man findet

$$\operatorname{tg} \alpha_{\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{3} \operatorname{tg} 120^0 \pm \tfrac{1}{3} \sqrt{\operatorname{tg}^2 120^0 - 3},$$
$$\angle \beta_{\frac{1}{2}} = \angle \alpha_{\frac{1}{2}} + 120^0.$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen ist gleich Null, demnach

$$\alpha_{\frac{1}{2}} = 30^0, \quad \beta_{\frac{1}{2}} = 150^0.$$

280. $a_1{}^2 + b_1{}^2 = a^2 + b^2, \quad a_1 b_1 \sin \varphi = ab.$

281. $2a = 14{,}69002, \quad 2b = 8{,}95538.$

282. Es ist $2a_1 = 2b_1 = \sqrt{2(a^2 + b^2)}, \qquad \sin \varphi = \frac{2ab}{a^2 + b^2},$

$$\angle \alpha = 90 - \frac{\varphi}{2}, \quad \angle \beta = 90 + \frac{\varphi}{2}.$$

Beispiel. $2a_1 = 2b_1 = 13{,}34166, \quad \angle \varphi = 115^0\, 59'\, 20'',$
$\angle \alpha = 32^0\, 0'\, 20'', \qquad \angle \beta = 147^0\, 59'\, 40''.$

283. $F = 2a_1 b_1 \sin \varphi = 2ab.$

284. α) $J = 4\, ab.$

β) Die Richtigkeit der Behauptung findet man leicht, wenn man je zwei aufeinander folgende Berührungspunkte verbindet.

285. Durch Benutzung der Transformationsgleichungen

$$x = x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \alpha_1, \quad y = x_1 \sin \alpha + y_1 \sin \alpha_1$$

erhält man

$$(a^2 \sin^2 \alpha_1 + b^2 \cos^2 \alpha_1)\, y_1{}^2 + (a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)\, x_1{}^2$$
$$+ 2\,(a^2 \sin \alpha \sin \alpha_1 + b^2 \cos \alpha \cos \alpha_1)\, x_1 y_1 = a^2 b^2,$$

woraus sich

$$a_1{}^2 y_1{}^2 + b_1{}^2 x_1{}^2 = a_1{}^2 b_1{}^2$$

ergiebt.

286. $a_1{}^2 q^2 + b_1{}^2 p^2 = p^2 q^2.$

287. $a_1{}^2 y_1 y + b_1{}^2 x_1 x = a_1{}^2 b_1{}^2.$

288. Die Koordinaten des Poles sind:

$$x_1 = \frac{a_1{}^2}{p}, \quad y_1 = \frac{b_1{}^2}{q}.$$

289. Es seien $2a_2$, der nach dem Berührungspunkte P gezogene Durchmesser, und $2b_2$, der demselben konjugierte, die Koordinatenachsen. Ist M die Richtungskonstante von OR, also $-\frac{b_2{}^2}{a_2{}^2 M}$ die von OS, so sind die Abschnitte der Tangente

$$PR = Ma_2, \quad PS = -\frac{b_2^2}{a_2 M},$$

demnach $PR \cdot PS = -b_2^2$.

290. Der nach dem Berührungspunkte P gezogene Durchmesser $2a_1$ und der demselben konjugierte $2b_1$ mögen als Koordinatenachsen betrachtet werden, dann sind die Gleichungen der Tangenten

$$(KR)\ a_1^2 y_1 y + b_1^2 x_1 x = a_1^2 b_1^2,$$
$$(K_1S)\ -a_1^2 y_1 y - b_1^2 x_1 x = a_1^2 b_1^2,$$
$$x = a_1;$$

demnach

$$PR \cdot PS = \frac{b_1^4 (x_1^2 - a_1^2)}{a_1^2 y_1^2} = -b_1^2,$$

d. h. das Rechteck aus den Abschnitten der dritten Tangente ist gleich dem Quadrate des derselben parallelen Halbdurchmessers.

291. Wird der Durchmesser $2a_1$ als X-Achse, der demselben konjugierte $2b_1$ als Y-Achse betrachtet, so ist die Gleichung der Tangente, deren Berührungspunkt P ist,

$$a_1^2 y_1 y + b_1^2 x_1 x = a_1^2 b_1^2;$$

demnach sind die Abschnitte auf den parallelen Tangenten

$$SK_1 = \frac{b_1^2 (a_1 - x_1)}{a_1 y_1}, \quad RK = \frac{b_1^2 (a_1 + x_1)}{a_1 y_1},$$

also

$$SK_1 \cdot RK = \frac{b_1^4 (a_1^2 - x_1^2)}{a_1^2 y_1^2} = b_1^2.$$

292. Wählt man die beiden Sehnen zu Koordinatenachsen, so findet man

$$s_1 + s_2 = \frac{2(a^2 + b^2)}{a}.$$

293. $$(m+n)^2 y^2 + n^2 x^2 = n^2 r^2$$

oder

$$(m+n)^2 y^2 + m^2 x^2 = m^2 r^2.$$

Beispiel. $4y^2 + x^2 = 36$.

294. $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{4} = \frac{r^2}{4}$. Die Halbierungspunkte liegen auf einer Ellipse, deren Mittelpunktskoordinaten $\frac{a}{2}$, 0 und deren Halbachsen $\frac{r}{2}$ und r sind.

295. $a^2\left(y-\frac{b}{2}\right)^2+b^2x^2=\frac{a^2b^2}{4}$.

Die Koordinaten des Mittelpunktes sind: $0, \frac{b}{2}$, die Halbachsen: $\frac{a}{2}$ und $\frac{b}{2}$.

296. Fällt die Grundlinie c mit der X-Achse zusammen und das im Halbierungspunkte derselben errichtete Lot mit der Y-Achse, so ist die Gleichung des Ortes

$$\left(\frac{u-c}{2}\right)^2 y^2+\frac{u}{2}\left(\frac{u}{2}-c\right)x^2=\frac{u}{2}\left(\frac{u}{2}-c\right)\left(\frac{u-c}{2}\right)^2.$$

Die Endpunkte der Grundlinie sind die Brennpunkte, die Halbachsen sind:

$$\tfrac{1}{2}(u-c), \qquad \tfrac{1}{2}\sqrt{u(u-2c)}.$$

297. Ist die Lage des Koordinatensystems dieselbe wie in der vorhergehenden Lösung, so ist die gesuchte Gleichung

$$9y^2+4x^2=c^2.$$

298. Die Lage des Koordinatensystems sei dieselbe wie in Lösung 296, dann erhält man

$$y^2+kx^2=\frac{kc^2}{4}.$$

299. Die Schenkel des rechten Winkels mögen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen. Rückt A auf der X-Achse, B auf der Y-Achse fort, so ist die Gleichung des geometrischen Ortes

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2.$$

300. Ist die Länge jedes Schenkels gleich s und wird der zweite durch den Punkt P im Verhältnis m zu n (von oben nach unten) geteilt, so bewegt sich der Punkt P auf einer Ellipse, deren Gleichung

$$\frac{(m+n)^2y^2}{n^2}+\frac{(m+n)^2x^2}{(2m+n)^2}=s^2$$

ist.

301. Bezeichnen wir die Hälfte des veränderlichen Winkels mit φ, so ist

$$2y=(a-b)\sin\varphi, \qquad 2x=(a+b)\cos\varphi,$$

demnach die Gleichung des Ortes

$$\frac{4y^2}{(a-b)^2}+\frac{4x^2}{(a+b)^2}=1.$$

302. Läßt man die Seite c mit dem positiven Teile der X-Achse, den Eckpunkt A mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammenfallen, so erhält man:

$$(a+b+c)y^2+(a+b-c)x^2-c(a+b-c)x=0.$$

Dies ist die Scheitelgleichung einer Ellipse, deren Halbachsen

$$\frac{c}{2} \quad \text{und} \quad \frac{c}{2}\sqrt{\frac{a+b-c}{a+b+c}}$$

sind.

303. Die Bahn des Schwerpunktes entspricht der Gleichung

$$\frac{9\left(x-\frac{c}{3}\right)^2}{a_1^{\,2}}+\frac{9y^2}{b_1^{\,2}}=1.$$

Die Mittelpunktskoordinaten dieser Ellipse sind $\frac{c}{3}$, 0; die Halbachsen $\frac{a_1}{3}$ und $\frac{b_1}{3}$.

304. Der Höhenpunkt beschreibt die Ellipse

$$y^2=\frac{a^2}{b^2}(2ax-x^2),$$

deren Halbachsen a und $\frac{a^2}{b}$ sind.

305. $a^2y^2+b^2x^2=b^2e^2$.

306. Der geometrische Ort des Punktes P ist die Ellipse

$$e^2y^2+2b(a-b)x^2-2bc(a-b)x=b^2e^2,$$

deren Halbachsen $\frac{e}{2}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$ und $\sqrt{\frac{b(a+b)}{2}}$ sind.

Wo liegen die Brennpunkte dieser Ellipse?

307. $r_1^{\,2}y^2+r_2^{\,2}x^2=r_1^{\,2}r_2^{\,2}$.

308. $r^2y^2+b^2x^2=r^2b^2$.

309. Ist b der Abstand des Punktes N vom Mittelpunkte des Kreises, so ist die Gleichung des Ortes

$$r^2x^2+b^2y^2=r^2b^2.$$

310. $y^2+2x^2-4rx=0$.

Die Halbachsen dieser Ellipse sind r und $2r$.

311. $4y^2+x^2-4rx=0$.

Halbachsen: $2r$ und r.

312. $16y^2 - 48y + 25x^2 = 64$.

Die Koordinaten des Mittelpunktes sind: 0, $\frac{3}{2}$; die Halbachsen: 2 und 2,5.

313. $9y^2 + 8x^2 - 4rx = 4r^2$.

Die Mittelpunktskoordinaten der Ellipse sind: $\frac{r}{4}$, 0, die Halbachsen: $\frac{3}{4}r$ und $\frac{r}{\sqrt{2}}$.

314. Man erhält:

$$25y^2 + 24x^2 - 24x = 144.$$

Die Mittelpunktskoordinaten der Ellipse sind: $\frac{1}{2}$, 0, die Halbachsen: $\frac{5}{2}$, $\sqrt{6}$.

315. Die Gleichung des Ortes ist

$$9y^2 + 8x^2 - 8x = 16,$$

d. h. eine Ellipse, deren Mittelpunktskoordinaten $\frac{1}{2}$, 0 und deren Halbachsen $\frac{3}{2}$ und $\sqrt{2}$ sind.

316. In der Anfangslage berühre der bewegte Kreis den festen in dem positiven Teile der X-Achse und der Punkt P sei um $\frac{a}{2}$ vom Berührungspunkte entfernt, dann ist die Gleichung der Kurve, welche der Punkt P beschreibt,

$$\frac{4x^2}{9a^2} + \frac{4y^2}{a^2} = 1.$$

317. Die Gleichung einer Polare bezüglich des gegebenen Kreises hat die Gestalt

$$(x - r)(x_1 - r) + yy_1 = 2r^2,$$

worin x_1, y_1 die Koordinaten des zugehörigen Poles sind.

Soll die Polare zugleich Tangente der Parabel sein, so müssen die Größen x_1, y_1 der Relation

$$y_1^{\,2} + 2x_1^{\,2} = 2r^2$$

genügen. Der Pol beschreibt demnach eine Ellipse.

318. Man benutzt die Relationen $FP + F_1P = 2a$ und $a^2 = b^2 + \left(\frac{FF_1}{2}\right)^2$.

319. Fällt man von F und F_1 Lote auf t, so sind die beiden Fußpunkte Punkte des Hauptkreises. Verlängert man ferner eins

dieser Lote über den Fußpunkt hinaus um sich selbst, und verbindet den Endpunkt der Verlängerung mit dem andern Brennpunkte, so erhält man in dieser Verbindungslinie einen geometrischen Ort des Berührungspunktes.

Determination. Die Lösung ist nur dann möglich, wenn t die Verbindungslinie der beiden Punkte F und F_1 nicht durchschneidet.

320. Determination. Man erhält nur eine Lösung.

321. Man bestimme zunächst die Lage des zweiten Brennpunktes und somit die Richtung der Hauptachse.

322. Man konstruiert mit Leichtigkeit zwei geometrische Örter des Brennpunktes F_1.

323. Hat man den zweiten Brennpunkt und die Achsen gefunden, so läßt sich Lage und Länge des konjugierten Durchmessers bestimmen, indem man geometrische Örter für die Endpunkte desselben konstruiert.

324. Man benutze zur Lösung entweder den Satz: Die Fußpunkte der Lote, welche man von dem Brennpunkte auf die gegebenen Tangenten fällen kann, sind Punkte des Hauptkreises, oder man konstruiere geometrische Örter für den zweiten Brennpunkt.

325. Siehe die vorhergehende Lösung.

326. Konstruiere den Hauptkreis, verbinde P mit dem Brennpunkte F, schlage über dieser Linie als Durchmesser einen Kreis und verbinde die Schnittpunkte beider Kreise mit P. Sind auf diese Weise die Richtungen der Tangenten gefunden, so bestimmt man leicht die Berührungspunkte, indem man die Gegenpunkte der Brennpunkte zu Hilfe nimmt.

327. Man suche mit Hilfe paralleler Sehnenscharen den Mittelpunkt, ziehe einen beliebigen Durchmesser und bestimme mit Hilfe rechtwinkliger Supplementarsehnen die Richtungen der Achsen. Für die letzte Frage siehe die vorhergehende Lösung.

328. Man errichte im Mittelpunkte auf der Hauptachse, welche der Richtung nach gegeben ist, ein Lot und konstruiere mit Hilfe von Lösung 230 einen geometrischen Ort für die Brennpunkte. Zur Konstruktion der Direktrixen bietet Lösung 248 das Mittel.

329. Die Lösung der Aufgabe ist nur möglich, wenn die gegebene Tangente von dem Hauptkreise geschnitten wird.

330. Man verlängere die Ordinate des gegebenen Punktes PK über P hinaus bis zum Schnitt mit dem Hauptkreise in L, verbinde L mit dem Mittelpunkte O und ziehe durch P eine Parallele zur Hauptachse, welche den Radius OL in R schneidet, dann ist OR gleich der kleineren Halbachse.

331. Zur Bestimmung der Längen der Achsen lassen sich die Relationen

$$a^2 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - y_1} \cdot \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{y_2 + y_1},$$
$$b^2 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2} \cdot \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_1 + x_2}$$

verwerten. Die Lösung ist nur möglich, wenn die Differenzen $x_1{}^2 - x_2{}^2$ und $y_2{}^2 - y_1{}^2$ dasselbe Vorzeichen besitzen.

332. Verbindet man den Schnittpunkt der Tangenten t_1, t_2 mit dem Halbierungspunkte von P_1P_2, so erhält man einen geometrischen Ort des Mittelpunktes. Für die Fortsetzung der Konstruktion siehe die vorige Lösung.

333. Man zieht durch den Punkt P eine Parallele zur Hauptachse, welche den über der kleineren Achse als Durchmesser konstruierten Kreis in L schneidet. Die Verlängerung des Radius OL durchschneidet dann die Verlängerung der Ordinate von P in einem Punkte des Hauptkreises.

Determination. Die Lösung ist nur möglich, wenn P außerhalb des Kreises über der kleineren Achse liegt und wenn die Parallele durch P zur Hauptachse diesen Kreis schneidet.

334. Determination. Die Konstruktion ist unmöglich, wenn der Hauptkreis die Tangente t nicht durchschneidet.

335. Man ziehe durch B eine Parallele zu AA_1, welche Tangente der Ellipse sein wird, errichte im Berührungspunkte B auf derselben ein Lot $= a_1$ und konstruiere einen Kreis, der durch den Endpunkt des Lotes und den Schnittpunkt O der konjugierten Durchmesser geht, dessen Mittelpunkt in der Tangente liegt. Verbindet man den Punkt O mit den Schnittpunkten des Kreises und der Tangente, so erhält man die Richtungen der Achsen. Vergl. Lösung 289. Welches ist die Richtung der Hauptachse?

336. Bei der Konstruktion berücksichtige man Lösung 249.

Determination. Direktrix und Polare müssen konvergent sein.

337. $J = ab\pi$.

Beispiel. $J = 6\pi = 18{,}8491556\ldots\square$.

338. $J = 17{,}85357\,\square$.

339. $J = \dfrac{s^2}{\sqrt{5}}\pi = 1{,}40496\,.\,s^2$.

340. Eine einfache geometrische Betrachtung führt zu dem Resultate

$$\underset{(e)}{\text{Segm.}} : \underset{(k)}{\text{Segm.}} = b : a.$$

341. Mit Hilfe der vorhergehenden Lösung findet man leicht

$$\underset{(e)}{\text{Sect.}} : \underset{(k)}{\text{Sect.}} = b : a.$$

342. Sect. $= \frac{5}{2}\pi = 7{,}8539815\,\square$.

343. Sect. $= \dfrac{\sqrt{55}\,\pi}{24} = 0{,}97078\,\square$.

344. Die Inhalte der Segmente sind:

$$F_1 = 1{,}16883\,\square, \quad F_2 = 64{,}80467\,\square.$$

345. Man erhält:

$$F_1 = \tfrac{4}{9}\alpha\pi - 8{,}75\sqrt{15} = 6{,}54\,\square,$$

$$F_2 = 80\pi - F_1 = 245{,}787408\,\square \quad \left(\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{8}\right).$$

346. Man findet:

$$F_1 : F_2 = 4\pi - 3\sqrt{3} : 8\pi + 3\sqrt{3}.$$

347. Die beiden äußeren Teile sind einander gleich:

$$F_1 = F_3 = 3{,}1604\,\square,$$

der mittlere Teil:

$$F_2 = 40{,}832\,\square.$$

348. Man erhält:

$$F_1 = 27{,}97574\,\square, \quad F_2 = 34{,}856112\,\square.$$

Die Hyperbel.

349. Die Gleichung des geometrischen Ortes ist

$$a^2y^2 + (a^2 - e^2)\,x^2 = a^2\,(a^2 - e^2),$$

oder wenn $e^2 - a^2$ gleich b^2 gesetzt wird,

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -\,a^2b^2.$$

Der geometrische Ort ist eine Hyperbel.

350. $64\,y^2 - 49\,x^2 = -\,3136$.

351. $25\,y^2 - 144\,x^2 = -\,3600$.

352. $y^2 - 8x^2 = -8a^2$.

Da man a jeden beliebigen Wert beilegen kann, so entspricht dieser Gleichung ein System von Hyperbeln.

353. $84y^2 - 625x^2 = -10000$.

354. Man erhält

$$\frac{y_1^2x_2^2 - y_2^2x_1^2}{y_1^2 - y_2^2}\,x^2 - \frac{y_1^2x_2^2 - y_2^2x_1^2}{x_1^2 - x_2^2}\,y^2 = -\frac{(y_1^2x_2^2 - y_2^2x_1^2)^2}{(y_1^2 - y_2^2)(x_1^2 - x_2^2)}.$$

Beispiel. $7x^2 - 3y^2 = 148$.

355. $x = y = \pm\dfrac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2}}$.

Die Hyperbel kann nur dann Punkte besitzen, deren Koordinaten dieser Anforderung genügen, wenn $b^2 > a^2$ ist.

356. $p = \dfrac{2b^2}{a}$.

357. Die Hyperbel, welche der Aufgabe genügt, entspricht der Gleichung

$$\left\{\frac{p^2}{8} + e^2 - \frac{p}{2}\sqrt{e^2 + \frac{p^2}{16}}\right\} y^2 - \left\{\frac{p}{2}\sqrt{e^2 + \frac{p^2}{16}} - \frac{p^2}{8}\right\} x^2$$
$$= -\left\{\frac{p^2}{8} + e^2 - \frac{p}{2}\sqrt{e^2 + \frac{p^2}{16}}\right\}\left\{\frac{p}{2}\sqrt{e^2 + \frac{p^2}{16}} - \frac{p^2}{8}\right\}.$$

Beispiel.

$$(33 - 4\sqrt{29})\,y^2 - \{4\sqrt{29} - 8\}\,x^2 = -(33 - 4\sqrt{29})(4\sqrt{29} - 8).$$

358. Es ist $x - a : y = y : x + a$, d. h. jede Ordinate ist die mittlere Proportionale zwischen den Abständen ihres Fußpunktes von den Scheiteln der Hyperbel. Wie lassen sich demnach die einzelnen Punkte einer gleichseitigen Hyperbel durch Konstruktion finden, wenn die Hauptachse derselben gegeben ist?

359. Die Gleichungen der Brennstrahlen sind:

$$y - y_1 = \frac{y_1}{x_1 - e}(x - x_1) \quad \text{und} \quad y - y_1 = \frac{y_1}{x_1 + e}(x - x_1),$$

die Längen derselben:

$$PF = \frac{ex_1}{a} - a = \varepsilon x_1 - a,$$
$$PF_1 = \frac{ex_1}{a} + a = \varepsilon x_1 + a.$$

Beispiel. $y - \frac{8}{3}\sqrt{5} = -\frac{2}{3}\sqrt{5}\left(\sqrt{29} + 5\right)(x - 5)$,

$$y - \frac{8}{3}\sqrt{5} = \frac{2}{3}\sqrt{5}\left(\sqrt{29} - 5\right)(x - 5).$$

$$PF = 5{,}97527, \qquad PF_1 = 11{,}97527.$$

360. Aus der vorhergehenden Lösung folgt:

$$PF + PF_1 = 2\varepsilon x_1,$$

d. h. die Summe der beiden Brennstrahlen wird erhalten, wenn man die Abscisse mit der doppelten numerischen Excentricität multipliziert.

361. $\angle \varphi = 24^0\, 11'\, 57''$.

362. Man erhält vier Punkte, deren Brennstrahlen der Anforderung genügen; die Koordinaten derselben sind:

$$x_{\frac{1}{2}} = 10{,}4487, \qquad y_{\frac{1}{2}} = \pm\, 2{,}4132,$$
$$x_{\frac{3}{4}} = -\,10{,}4487, \qquad y_{\frac{3}{4}} = \mp\, 2{,}4132,$$

363. Es ist $t_1 : y_1 = a : b$, für die gleichseitige Hyperbel demnach $t_1 = y_1$.

364. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{y_1}$.

365. $49y^2 + 392y - 100x^2 + 1000x + 3184 = 0$.

366. $y^2 = \frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2$ oder $y^2 = px + qx^2$.

367. Die Achsen der Hyperbel sind:

$$2a = 12, \qquad 2b = 14.$$

368. Die Hauptachse der Hyperbel ist $2a = \frac{px_1^2}{y_1^2 - px_1}$, die Scheitelgleichung $y^2 = px + \frac{y_1^2 - px_1}{x_1^2}x^2$.

369. $y^2 = \frac{2b^2}{\sqrt{e^2 - b^2}}x + \frac{b^2}{e^2 - b^2}x^2$.

370. $$r = \frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\vartheta - a^2\sin^2\vartheta}}$$

oder

$$r = \frac{b}{\sqrt{\varepsilon^2\cos^2\vartheta - 1}}.$$

371. Man erhält, wenn man den rechtsliegenden Brennpunkt als Pol annimmt:

$$\varrho = \frac{b^2}{\pm a - e \cos \varphi},$$

d. h. für jeden Wert von φ zwei Werte von ϱ:

$$\varrho = \frac{\frac{1}{2} p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \quad \varrho = \frac{-\frac{1}{2} p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

Der Radiusvektor kann nur positive Werte besitzen. Der Endpunkt desselben beschreibt demnach, wenn a das positive Vorzeichen hat, den rechts liegenden Hyperbelzweig, und wenn a das negative Vorzeichen hat, den links liegenden Hyperbelzweig.

Ist der links liegende Brennpunkt der Pol, so ergiebt sich

$$\varrho = \frac{b^2}{\pm a + e \cos \varphi},$$

also

$$\varrho = \frac{\frac{1}{2} p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad \varrho = \frac{-\frac{1}{2} p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

372. Da die Anomalien φ und $\pi + \varphi$ sind, so ergiebt sich

$$\varrho_1 \cdot \varrho_2 = \frac{\frac{1}{4} p^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}$$

oder

$$\varrho_1 \cdot \varrho_2 = \tfrac{1}{4} p \, (\varrho_1 + \varrho_2).$$

Vergl. Lösung 180.

373. Es ist

a) $\varrho = p$ für $\cos \varphi = -\dfrac{1}{2\varepsilon}$ und für $\cos \varphi = \dfrac{3}{2\varepsilon}$,

b) $\varrho = 2a$ für $\cos \varphi = \dfrac{\varepsilon^2 - 3}{2\varepsilon}$ und für $\cos \varphi = \dfrac{1 + \varepsilon^2}{2\varepsilon}$,

c) $\varrho = 2e$ für $\cos \varphi = \dfrac{\varepsilon^2 - 2\varepsilon - 1}{2\varepsilon^2}$ und für $\cos \varphi = \dfrac{\varepsilon^2 + 2\varepsilon - 1}{2\varepsilon^2}$.

374. Man findet

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1 + \varepsilon \cos \varphi}{\frac{1}{2} p} + \frac{1 - \varepsilon \cos \varphi}{\frac{1}{2} p}\right) = \frac{2}{p}.$$

375. $$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{2 - \varepsilon^2}{p},$$

d. h. zieht man in einer Hyperbel zwei sich rechtwinklig schneidende Brennpunktsehnen, so ist die Summe ihrer reciproken Werte konstant.

376. Die Koordinaten der Schnittpunkte sind:

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{Mna^2 \pm ab\sqrt{b^2 + n^2 - a^2M^2}}{b^2 - a^2M^2},$$

$$y_{\frac{1}{2}} = \frac{nb^2 \pm abM\sqrt{b^2 + n^2 - a^2M^2}}{b^2 - a^2M^2}.$$

Beispiele. 1. $x_{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{4} \pm \frac{3}{4}\sqrt{17}, \quad y_{\frac{1}{2}} = -3\frac{3}{8} \pm \frac{3}{8}\sqrt{17}.$

2. $x_{\frac{1}{2}} = 5, \quad y_{\frac{1}{2}} = -6\frac{2}{3}.$ Die Gerade ist eine Tangente der Hyperbel.

3. $x_{\frac{1}{2}} = -\frac{5}{16} \pm \frac{3}{16}i\sqrt{35}, \quad y_{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}i\sqrt{35}.$

377. Nimmt man mit der Relation $b^2 + n^2 - a^2M^2 \gtreqless 0$ eine ähnliche Umformung vor wie in Lösung 188, so gelangt man zu dem Resultate:

Die Gerade schneidet die Hyperbel in zwei reellen Punkten, wenn der Fußpunkt des von einem Brennpunkte auf die Gerade gefällten Lotes außerhalb der Fläche des Hauptkreises, in zwei imaginären Punkten, wenn der Fußpunkt des Lotes in der Kreisfläche liegt. Die Gerade ist dagegen Tangente der Hyperbel, wenn der Fußpunkt des Lotes sich auf der Peripherie des Hauptkreises befindet.

378. Man erhält

$$x_1 = -\frac{a(b^2 + n^2)}{2bn}, \quad y_1 = \frac{n^2 - b^2}{2n},$$

$$x_2 = \infty, \quad y_2 = \infty;$$

ferner

$$x_3 = \frac{a(b^2 + n^2)}{2bn}, \quad y_3 = \frac{n^2 - b^2}{2n},$$

$$x_4 = \infty, \quad y_4 = \infty.$$

Jede der Geraden schneidet die Hyperbel in einem endlichen Punkte, aber außerdem noch in einem unendlich fernen Punkte.

Wird $n = 0$ gesetzt, so berührt jede der Geraden die Hyperbel in einem unendlich fernen Punkte. Diese beiden Geraden werden die Asymptoten der Hyperbel genannt.

379. $x_{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \pm \frac{3}{10}\sqrt{5}, \quad y_{\frac{1}{2}} = 9 \pm \frac{6}{5}\sqrt{5}.$

380. $a^2u^2 - b^2v^2 - 1 = 0.$

381. Man erhält

$$-\frac{1}{u}=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{r^2(1+\mathrm{tg}^2\,\varphi)-4k^2\,\mathrm{tg}^2\,\varphi},$$

$$-\frac{1}{v}=\pm\frac{1}{2\,\mathrm{tg}\,\varphi}\sqrt{r^2\,(1+\mathrm{tg}^2\,\varphi)-4k^2\,\mathrm{tg}^2\,\varphi},$$

aus denen sich durch Elimination von $\mathrm{tg}\,\varphi$

$$\frac{r^2}{4}\,u^2-\frac{(4k^2-r^2)}{4}\,v^2-1=0$$

ergiebt. Die Enveloppe ist demnach eine Hyperbel mit den Achsen r und $\sqrt{4k^2-r^2}$.

382. Die Enveloppe ist eine Hyperbel, welche der Gleichung

$$r^2u^2-(x_1{}^2-r^2)\,v^2-1=0$$

entspricht.

383. Die Gleichung der Enveloppe in Linienkoordinaten ist

$$d^2v^2-(f^2-d^2)\,u^2-1=0.$$

Wie liegt die Hyperbel, welche dieser Gleichung entspricht?

384. Die X-Achse wird in den Punkten

$$x_1=-1+\tfrac{3}{5}\sqrt{34},\quad x_2=-1-\tfrac{3}{5}\sqrt{34},$$

die Y-Achse in den Punkten

$$y_1=3+\tfrac{10}{3}\,i\sqrt{2},\quad y_2=3-\tfrac{10}{3}\,i\sqrt{2}$$

geschnitten.

Die Gleichung der Hyperbel in Linienkoordinaten ist

$$34v^2-8u^2-6uv+6v-2u+1=0.$$

385. Die Gleichung der Sehne ist

$$9y-64x+741=0.$$

Dieselbe schneidet auf dem positiven Teile der X-Achse das Stück $11\frac{37}{64}$, auf dem negativen Teile der Y-Achse das Stück $82\frac{1}{3}$ ab. Der Neigungswinkel der Sehne zur X-Achse ist

$$\angle\,\varphi=81^0\,59'\,43''.$$

386. Die beiden Tangenten entsprechen der Gleichung

$$y=\frac{2\pm\sqrt{134}}{5}\,x.$$

387. Die Koordinaten der Ecken sind:

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2}}, \qquad y_{\frac{1}{2}} = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2}};$$

$$x_{\frac{3}{4}} = -\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2}}, \qquad y_{\frac{3}{4}} = \mp \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

Die Lösung ist nur möglich, wenn $b^2 > a^2$ ist.

388. Die Gleichungen der Seiten sind entweder

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x + \sqrt{\tfrac{10}{3}}\right), \quad y = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x + \sqrt{\tfrac{10}{3}}\right), \quad x = \tfrac{5}{4}\sqrt{\tfrac{10}{3}} + \tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{15}{2}};$$

oder

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \sqrt{\tfrac{10}{3}}\right), \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \sqrt{\tfrac{10}{3}}\right),$$

$$x = -\tfrac{5}{4}\sqrt{\tfrac{10}{3}} - \tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{15}{2}}.$$

389. $x_{\frac{1}{2}} = +2\sqrt{2 + 2\sqrt{\tfrac{55}{7}}}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{\tfrac{14}{3} + \tfrac{14}{3}\sqrt{\tfrac{55}{7}}};$

$x_{\frac{3}{4}} = -2\sqrt{2 + 2\sqrt{\tfrac{55}{7}}}, \quad y_{\frac{3}{4}} = \mp\sqrt{\tfrac{14}{3} + \tfrac{14}{3}\sqrt{\tfrac{55}{7}}}.$

390. $x_{\frac{1}{2}} = \dfrac{abn}{\sqrt{b^2n^2 - a^2m^2}}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \pm \dfrac{abm}{\sqrt{b^2n^2 - a^2m^2}};$

$x_{\frac{3}{4}} = -\dfrac{abn}{\sqrt{b^2n^2 - a^2m^2}}, \quad y_{\frac{3}{4}} = \mp \dfrac{abm}{\sqrt{b^2n^2 - a^2m^2}}.$

Beispiel. $x_{\frac{1}{2}} = \tfrac{10}{3}\sqrt{15}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \pm \tfrac{4}{3}\sqrt{15};$

$x_{\frac{3}{4}} = -\tfrac{10}{3}\sqrt{15}, \quad y_{\frac{3}{4}} = \mp \tfrac{4}{3}\sqrt{15}.$

391. Die Gleichung der Tangente ist $a^2y_1y - b^2x_1x = -a^2b^2$, der Abschnitt auf der X-Achse ist $= \dfrac{a^2}{x_1}$, der auf der Y-Achse $= -\dfrac{b^2}{y_1}$.

Beispiele. a) $2\sqrt{3}\,y - \sqrt{5}\,x + \sqrt{5} = 0.$

b) $3\sqrt{7}\,y - 16x - 28 = 0.$

392. Die Fußpunkte liegen auf der Peripherie des Hauptkreises

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Vergl. die Lösungen 377, 382 und 210.

393. Die Gleichung ist

$$y^2 + (x + e)^2 = 4\,a^2,$$

d. h. die Peripherie eines Kreises, dessen Mittelpunkt der andere Brennpunkt und dessen Radius gleich der Hauptachse $2\,a$ ist.

394. Man erhält zwei Punkte, deren Koordinaten sind:

$$x_{\frac{1}{2}} = \pm \frac{a^2 \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - b^2}}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - b^2}}.$$

Die Punkte sind nur dann reell, wenn der absolute Wert von $\operatorname{tg} \alpha > \frac{b}{a}$ ist.

Beispiel. $x_{\frac{1}{2}} = \pm \frac{100}{\sqrt{97}}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \pm \frac{9}{\sqrt{291}}.$

395. Man verbinde den gegebenen Punkt P mit einem der Brennpunkte und beschreibe über dieser Geraden als Durchmesser einen Kreis. Die Punkte, in welchen dieser den Hauptkreis der Hyperbel schneidet, verbinde man mit dem Punkte P. Vergl. Lösung 392.

Determination. Liegt der Punkt P außerhalb der Hyperbel, so lassen sich zwei reelle Tangenten ziehen, liegt er in der Hyperbelfläche, so sind die beiden Tangenten imaginär. Befindet sich der Punkt P auf der Hyperbel, so ist nur eine Tangente möglich. Warum?

396. Man fälle von einem Brennpunkte der Hyperbel ein Lot auf die gegebene Gerade g. Durch die Punkte, in denen dieses Lot den Hauptkreis schneidet, ziehe man Parallelen zu der Geraden g.

397. Zwei Gerade genügen der Aufgabe. Dieselben entsprechen der Gleichung

$$y = 4\,x \mp 8\sqrt{2}.$$

398. $l_1 \,.\, l_2 = -\,b^2$. Vergl. Lösung 224.

399. Die Hyperbel wird von den Kreisen

$$x^2 + y^2 \mp \frac{2\,e}{\operatorname{tg} \alpha}\, y - \varepsilon^2 = 0$$

in den gesuchten Berührungspunkten geschnitten. Wie viel Tangenten lassen sich konstruieren?

Beispiel. Man erhält in diesem Falle vier Tangenten, deren Gleichungen sind:

$$\pm 7y - 5\sqrt{7}\,x = -28,$$
$$\pm 7y + 5\sqrt{7}\,x = -28.$$

400. $y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$

Beispiel. $26y + 15x = 694{,}2.$

401. $\mathrm{Tg} = \frac{y_1}{b x_1}\sqrt{e^2 x_1^2 - a^4} = \frac{a y_1}{b x_1}\sqrt{r_1 r_2},$

$$\mathrm{N} = \frac{b}{a^2}\sqrt{e^2 x_1^2 - a^4} = \frac{b}{a}\sqrt{r_1 r_2},$$

$$\mathrm{Sbtg} = \frac{a^2 y_1^2}{b^2 x_1} = \frac{x_1^2 - a^2}{x_1}, \quad \mathrm{Sbn} = \frac{b^2 x_1}{a^2}.$$

Für die gleichseitige Hyperbel erhält man:

$$\mathrm{Tg} = \frac{y_1}{x_1}\sqrt{2x_1^2 - a^2} = \frac{y_1}{x_1}\sqrt{r_1 r_2}, \quad \mathrm{N} = \sqrt{2x_1^2 - a^2} = \sqrt{r_1 r_2},$$

$$\mathrm{Sbtg} = \frac{y_1^2}{x_1}, \qquad \mathrm{Sbn} = x_1.$$

Beispiel. $\mathrm{Tg} = \frac{3}{4}\sqrt{47}, \quad \mathrm{N} = \frac{4}{7}\sqrt{319},$
$\mathrm{Sbtg} = 2\frac{1}{4}, \quad \mathrm{Sbn} = 9\frac{1}{7}.$

402. $\mathrm{N} = \frac{2b}{a}\sqrt{e(e+a)}.$

Beispiel. $\frac{16}{3}\sqrt{10}.$

403. $x_{\frac{1}{2}} = 4{,}8, \quad y_{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{119}.$

404. Die Koordinaten der Punkte sind:

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \qquad y_{\frac{1}{2}} = \pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}};$$
$$x_{\frac{3}{4}} = -\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \qquad y_{\frac{3}{4}} = \mp\frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Die Hyperbel besitzt solche Punkte nicht, wenn $b^2 > a^2$ ist. Ist die Hyperbel eine gleichseitige, so liegen die betreffenden Punkte in der Unendlichkeit.

405. $x_{\frac{1}{2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - 4b^2}}, \qquad y_{\frac{1}{2}} = \pm\frac{2b^2}{\sqrt{a^2 - 4b^2}};$

$$x_{\frac{3}{4}} = -\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - 4b^2}}, \qquad y_{\frac{3}{4}} = \mp\frac{2b^2}{\sqrt{a^2 - 4b^2}}.$$

Determination?

406. Die Abscissen der gesuchten Punkte sind gleich den Wurzeln der Gleichung

$$x_1^4 (a^4 - b^2 e^2) - x_1^2 (2\,a^6 - a^4 b^2) + a^8 = 0,$$

nämlich $$x = \pm\, a^2 \sqrt{\frac{2\,a^2 - b^2 \pm b^2 \sqrt{5}}{2\,(a^4 - b^2 e^2)}}.$$

407. Bezeichnet man die Winkel, welche die Radienvektoren r_1 und r_2 mit der Tangente einschließen, mit α_1 und α_2, so findet man leicht $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{b^2}{e y_1}$.

408. Über die Konstruktion siehe die vorhergehende Aufgabe.

409. Aus den Lösungen 213 und 407 folgt, daß die Tangenten beider Kurven in jedem Schnittpunkte lotrecht zu einander stehen. Eine Ellipse wird also von einer konfokalen Hyperbel rechtwinklig durchschnitten.

410. Es ist $\operatorname{tg} \varphi = 4 \sqrt{5}$, demnach $\angle \varphi = 83^0\, 37'\, 14{,}3''$.

411. $L.N = -\frac{b^2 r_1}{a}$. [r_1 ist der von dem Brennpunkte $(e, 0)$ nach dem Punkte (x_1, y_1) gezogene Radiusvektor.]

412. Die gesuchten Punkte sind die Brennpunkte, denn in diesen schneidet der über der dritten Tangente konstruierte Kreis

$$\left(y + \frac{b^2}{y_1}\right)^2 + x^2 = \frac{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}{a^2 y_1^2}$$

die Hauptachse.

413. $\cos \varphi = \frac{a^4 y_1 y_2 + b^4 x_1 x_2}{\sqrt{(a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2)(a^4 y_2^2 + b^4 x_2^2)}}$.

Beispiel. $\angle \varphi = 3^0\, 34'\, 40''$.

414. Der Scheitel des rechten Winkels beschreibt den Kreis

$$x^2 + y^2 = a^2 - b^2;$$

derselbe wird nur dann reell sein, wenn $a^2 > b^2$ ist.

Ist die Hyperbel eine gleichseitige, so schrumpft der Kreis in den Koordinatenanfangspunkt zusammen. Die Schenkel des rechten Winkels sind dann die Asymptoten der Hyperbel.

415. Man erhält zwei Tangenten, welche der Gleichung

$$y - y_1 = \frac{y_1 x_1 \pm \sqrt{a^2 y_1^2 - b^2 x_1^2 + a^2 b^2}}{x_1^2 - a^2}\,(x - x_1)$$

entsprechen.

Welche Lage muß der Punkt $P(x_1, y_1)$ haben, wenn die beiden Tangenten reell sein sollen?

Beispiel. $y + x(2 \pm \sqrt{14}) = 9 \pm 2\sqrt{14}$.

416. Man erhält $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Beispiel. $y = \pm \frac{7}{5} x$.

417. $y = \pm \frac{b}{a} x$. Vergl. Lösung 378.

Beispiel. $y = \pm \frac{9}{2} x$.

418. $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, also $\angle \varphi = 83^0\, 37'\, 14''$.

419. Jedes der Lote ist gleich b, der Inhalt des Vierecks demnach gleich ab.

420. Man setzt:
$$x = (x_1 + y_1) \cos \alpha,$$
$$y = (y_1 - x_1) \sin \alpha,$$
und erhält, da $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{b^2}{a^2}$ ist,
$$x_1 y_1 = \frac{a^2 + b^2}{4} = \left(\frac{e}{2}\right)^2.$$

421. Die Gleichung der Tangente ist
$$y_1 x + x_1 y = \frac{a^2 + b^2}{2},$$
oder, da $y_1 x_1 = \frac{a^2 + b^2}{4}$ ist,
$$y_1 x + x_1 y = 2 x_1 y_1.$$

422. Die Bedingungsgleichung lautet:
$$M(a^2 + b^2) + n^2 = 0.$$

423. Man verbindet entweder den Punkt $(2x_1, 0)$ oder den Punkt $(0, 2y_1)$ mit dem gegebenen Berührungspunkte.

424. Die Richtigkeit ergiebt sich unter Berücksichtigung der Gleichung der Tangente (Lösung 421) aus einer einfachen geometrischen Betrachtung.

425. $J = 4 x_1 y_1 \frac{ab}{a^2 + b^2} = ab$. Die Tangente begrenzt demnach mit den Asymptoten ein Dreieck von konstantem Inhalt.
$$J : x_1 y_1 = 4ab : a^2 + b^2.$$

426. $J = \frac{ab}{2}$.

427. Die Gleichung ist $uv = \frac{1}{a^2 + b^2}$.

428. Die Gleichung der Polare ist

$$a^2 y_1 y - b^2 x_1 x = - a^2 b^2.$$

Beispiele. a) $99y - 25x + 225 = 0$,
b) $12y + 9x + 16 = 0$.

429. Die Koordinaten der Berührungspunkte sind:

$$x_{\frac{1}{2}} = - \frac{a^2 b^2 x_1 \pm a^2 y_1 \sqrt{a^2 {y_1}^2 - b^2 {x_1}^2 + a^2 b^2}}{a^2 {y_1}^2 - b^2 {x_1}^2},$$

$$y_{\frac{1}{2}} = - \frac{a^2 b^2 y_1 \pm b^2 x_1 \sqrt{a^2 {y_1}^2 - b^2 {x_1}^2 + a^2 b^2}}{a^2 {y_1}^2 - b^2 {x_1}^2}.$$

Beispiel. $x_{\frac{1}{2}} = - \frac{6(11 \pm 3\sqrt{19})}{5}$,

$$y_{\frac{1}{2}} = - \frac{11(9 \pm 2\sqrt{19})}{5}.$$

430. $y_1 x + x_1 y = \frac{a^2 + b^2}{2}$.

431. Man erhält

$$x = \frac{a^2}{e}, \quad x = - \frac{a^2}{e}.$$

Jede dieser Geraden wird eine Direktrix der Hyperbel genannt.

Sind die Asymptoten die Koordinatenachsen, so findet man

$$x + y = a, \quad x + y = - a.$$

432. Jeder der Abschnitte ist gleich $2a$.

433. Die Längen der Linien sind

$$\frac{ex_1 - a^2}{a} \quad \text{und} \quad \frac{ex_1 - a^2}{e},$$

oder

$$\frac{ex_1 + a^2}{a} \quad \text{und} \quad \frac{ex_1 + a^2}{e};$$

je zwei zusammengehörige Linien verhalten sich also wie $e : a$, wo $e > a$ ist.

434. $n^2 y^2 - (m^2 - n^2) x^2 - 2kn^2 x = - k^2 n^2$.

Der Ort ist eine Hyperbel. $(k, 0)$ ist ein Brennpunkt derselben, die Y-Achse die zugehörige Direktrix. Wie groß sind die Achsen?

435. Legt man die Asymptotengleichung zu Grunde, so findet man, daß jede der beiden Geraden gleich $x_1 + y_1 - a$ ist.

436. Der Strahl steht im Brennpunkte lotrecht zur Polare.

437. Verbindet man P mit einem Brennpunkte und errichtet auf dieser Linie im Brennpunkte ein Lot, so schneidet dieses die zugehörige Direktrix in einem zweiten Punkte der Tangente.

438. Die beiden Strecken sind einander gleich.

439. Da

$$\begin{vmatrix} x_1 - e & -b^2 x_1 & e \\ y_1 & a^2 y_1 & 0 \\ -e(x_1 - e) & a^2 b^2 & -a^2 \end{vmatrix} = 0$$

ist, so ist der Inhalt des Dreiecks ebenfalls gleich Null. Die drei Geraden gehen durch einen Punkt.

440. $x_1 = -\frac{La^2}{N}, \quad y_1 = \frac{Mb^2}{N}.$

Beispiele. a) $x_1 = \frac{3}{4}, \quad y_1 = 5;$
b) $x_1 = -6\frac{1}{4}, \quad y_1 = -12.$

441. Man erhält die Gleichung des Ortes

$$a^4 y^2 + b^4 x^2 = a^2 b^4.$$

Die Pole liegen also auf einer Ellipse, deren Halbachsen a und $\frac{b^2}{a}$ sind.

442. Der Pol bewegt sich auf der Ellipse

$$\frac{e^2 x^2}{a^4} + \frac{e^2 y^2}{b^4} = 1$$

fort.

443. Der geometrische Ort des Poles ist eine Ellipse, welche der Gleichung

$$\frac{a_1{}^2}{a^4} x^2 + \frac{(a_1{}^2 - e^2)}{(e^2 - a^2)^2} y^2 = 1$$

entspricht.

444. Die Pole liegen auf der Geraden

$$LNy - MNx = LMe^2.$$

Vergl. Lösung 256.

445. Die Enveloppe ist eine Ellipse, deren Gleichung in Linienkoordinaten ist:

$$\frac{a^4}{a^2 - b^2} u^2 + \frac{b^4}{a^2 - b^2} v^2 - 1 = 0.$$

446. Man erhält

$$a^2 a_1^2 y_1 (b^2 - b_1^2) u + b^2 b_1^2 x_1 (a^2 - a_1^2) v = x_1 y_1 (a_1^2 b^2 - a^2 b_1^2).$$

Die Polaren bilden also ebenfalls ein Büschel.

447. $y = \frac{b^2}{a^2 \operatorname{tg} \varphi} x$; φ ist der Winkel, unter dem die vom Koordinatenanfangspunkte nach dem Pole gerichtete Gerade gegen die X-Achse geneigt ist.

448. Jede dieser Sehnen wird halbiert. Vergl. Lösung 80.

449. Sind M_1, M_2 die Richtungskonstanten, so ist

$$M_1 M_2 = \frac{b^2}{a^2}.$$

Für die gleichseitige Hyperbel erhält man $M_1 M_2 = 1$.

450. Die Bedingungsgleichung heißt: $A_1 = -A_2$.

451. Aus Lösung 449 folgt, daß der konjugierte Durchmesser mit derselben Asymptote zusammenfällt.

452. Das Büschel ist ein involutorisches, da die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -M_1 - \frac{b^2}{a^2 M_1} & -M_2 - \frac{b^2}{a^2 M_2} & -M_3 - \frac{b^2}{a^2 M_3} \\ \frac{b^2}{a^2} & \frac{b^2}{a^2} & \frac{b^2}{a^2} \end{vmatrix}$$

den Wert Null hat. Die Parameter der Doppelstrahlen entwickelt man mit Hilfe der Relation

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -M_1 - \frac{b^2}{a^2 M_1} & -M_2 - \frac{b^2}{a^2 M_2} & 2k \\ \frac{b^2}{a^2} & \frac{b^2}{a^2} & k^2 \end{vmatrix} = 0;$$

die Wurzeln derselben sind $k_{\frac{1}{2}} = \pm \frac{b}{a}$. Die Asymptoten der Hyperbel sind demnach die Doppelstrahlen des involutorischen Strahlenbüschels.

453. Da das Produkt $M_1 M_2$ gleich $\frac{b^2}{a^2}$, also stets positiv ist, so schließen die konjugierten Durchmesser entweder beide spitze oder beide stumpfe Winkel mit der Hauptachse ein.

Ist $M_1 < \frac{b}{a}$, so ist $M_2 > \frac{b}{a}$ u. s. f. Daraus folgt: Von zwei konjugierten Durchmessern schneidet der eine die Hyperbel in zwei reellen Punkten, der andere in zwei imaginären Punkten. Der erste wird ein Hauptdurchmesser, der zweite ein Nebendurchmesser der Hyperbel genannt.

454. a) $16y - 75x = 0$.
b) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{209}{123}$, also $\angle\varphi = 59^0\,30'\,21''$.

455. $12y - 245x + 1189 = 0$.

456. $2b_1 = 2\sqrt{\frac{a^4M^2 + b^4}{a^2M^2 - b^2}}$.

Beispiel. $2b_1 = \frac{10}{3}\sqrt{3}$.

457. Man erhält zwei Paare von Durchmessern, deren Gleichungen sind:

$$y = \frac{\sqrt{3281} - 41}{32}x, \quad y = \frac{\sqrt{3281} + 41}{32}x,$$

und

$$y = -\frac{(\sqrt{3281} + 41)}{32}x, \quad y = -\frac{(\sqrt{3281} - 41)}{32}x.$$

458. Man zieht durch P den Durchmesser und konstruiert den dazu konjugierten. Die gesuchte Tangente läuft dem letzteren parallel.

459. Die Berührungspunkte sind mit Hilfe zweier konjugierten Durchmesser zu finden. (Vergl. die vorhergehende Lösung.)

460. Der geometrische Ort der Punkte ist ebenfalls eine Hyperbel; die Gleichung derselben ist

$$a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2.$$

Diese und die ursprüngliche Hyperbel werden konjugierte genannt.

461. Die Gleichungen der Asymptoten der Hyperbeln sind

$$y = +\frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Konjugierte Hyperbeln haben demnach die Asymptoten gemein.

462. Sind (x_1, y_1) die Koordinaten des Punktes der ersten Hyperbel, so ist

$$r_1 + r_2 = r_1{}^1 + r_2{}^1 = \frac{2cx_1}{a}.$$

463. Berechnet man die Koordinaten der Punkte, in welchen die Tangente von den Asymptoten geschnitten wird, so findet man, daß der Abschnitt der Tangente

$$t = 2\sqrt{\frac{a^4 M^2 + b^4}{b^2 - a^2 M^2}}$$

ist. Vergleicht man dieses Resultat mit dem in Lösung 456 gefundenen, so ergiebt sich, daß der Abschnitt der Tangente gleich dem Nebendurchmesser ist.

464. Es ist $s = \dfrac{2ab^2(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)}{a^2 \operatorname{tg}^2\varphi - b^2}$, demnach

$$2a : d = d : s.$$

Wie gestaltet sich das Resultat für die Ellipse?

465. a) $a^2 - b^2 = a_1{}^2 - b_1{}^2$,

b) $ab = a_1 b_1 \sin\varphi$.

466. Es ist $a_1{}^2 = \dfrac{a^2(1 + M^2)}{1 - M^2}$, $b_1{}^2 = -\dfrac{a^2(1 + M^2)}{1 - M^2}$.

Je zwei konjugierte Durchmesser der gleichseitigen Hyperbel sind demnach gleich.

467. $2a = \sqrt{2(\sqrt{3026} - 24)}$, $2b = \sqrt{2(\sqrt{3026} + 24)}$.

468. Man zieht durch die beiden Endpunkte eines jeden Durchmessers Parallelen zu dem andern, dann sind die Diagonalen des so entstandenen Parallelogramms die gesuchten Asymptoten. Auf welche früheren Lösungen stützt sich diese Konstruktion?

469. Man konstruiert nach der vorhergehenden Lösung die Asymptoten der Kurve, so werden die Halbierungslinien der Asymptotenwinkel die gesuchten Achsen sein.

470. $J = 2ab$.

471. $J = ab$.

472. $a_1{}^2 y_1{}^2 - b_1{}^2 x_1{}^2 = -a_1{}^2 b_1{}^2$.

Über die Entwicklung des Resultates vergl. die Lösung 285.

473. Geht man von den ursprünglichen Gleichungen aus und führt das neue Koordinatensystem ein, so erhält man

$$y = +\frac{b_1}{a_1}x, \quad y = -\frac{b_1}{a_1}x.$$

474. Die beiden Verlängerungen sind gleich. Der Beweis läßt sich leicht führen, wenn man den der gegebenen Sehne konjugierten Durchmesser zur X-Achse, den der Sehne parallelen Durchmesser zur Y-Achse wählt.

475. Legt man der Untersuchung dasselbe Koordinatensystem zu Grunde wie in der Lösung der vorhergehenden Aufgabe, und bezeichnet man den Abschnitt, den die Sekante auf der X-Achse bildet, mit x_1, so findet man, daß der äußere Abschnitt gleich

$$\frac{b_1}{a_1}x_1 - \frac{b_1}{a_1}\sqrt{x_1^2 - a_1^2},$$

die ganze Sekante gleich

$$\frac{b_1}{a_1}x_1 + \frac{b_1}{a_1}\sqrt{x_1^2 - a_1^2},$$

demnach das Rechteck aus beiden Strecken

$$\left\{\frac{b_1}{a_1}x_1 - \frac{b_1}{a_1}\sqrt{x_1^2 - a_1^2}\right\}\left\{\frac{b_1}{a_1}x_1 + \frac{b_1}{a_1}\sqrt{x_1^2 - a^2}\right\} = b_1^2$$

ist.

476. Die Resultate stimmen mit den früher gefundenen überein.

477. Der geometrische Ort ist eine gleichseitige Hyperbel, welche der Gleichung

$$2xy - 7x + 4y = 0$$

entspricht. Die Asymptoten derselben sind: $x = -2$, $y = \frac{7}{2}$.

478. Sind die beiden Geraden Koordinatenachsen, so ist die Gleichung des Ortes

$$xy \sin\alpha = f^2;$$

derselbe ist also eine Hyperbel, deren Asymptoten die beiden Geraden sind.

479. Die Teilpunkte liegen auf der gleichseitigen Hyperbel

$$x^2 + x - (y^2 + y) = \frac{9}{4},$$

deren Mittelpunktskoordinaten $x_1 = -\frac{1}{2}$, $y_1 = -\frac{1}{2}$ sind.

480. Ist $y - y_1 = \operatorname{tg}\alpha\,(x - x_1)$ die Gleichung eines Strahles, so sind die Koordinaten des Halbierungspunktes der Sehne

$$\xi = \frac{a^2 \operatorname{tg}\alpha\,(x_1 \operatorname{tg}\alpha - y_1)}{a^2 \operatorname{tg}^2\alpha - b^2}, \quad \eta = \frac{b^2(x_1 \operatorname{tg}\alpha - y_1)}{a^2 \operatorname{tg}^2\alpha - b^2}.$$

Daraus findet man durch Elimination von $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\eta = 0,$$
$$b^2\xi^2 - a^2\eta^2 - b^2x_1\xi + a^2y_1\eta = 0.$$

Der geometrische Ort wird also von der X-Achse und einer Hyperbel gebildet. Welches sind die Mittelpunktskoordinaten der Kurve? Wie groß sind die Achsen?

481. Man erhält als Gleichung des geometrischen Ortes
$$y^2 - kx^2 + kcx = 0.$$
Derselbe ist also eine Hyperbel, deren Achsen c, $c\sqrt{k}$, und deren Mittelpunktskoordinaten $x_1 = \frac{c}{2}$, $y_1 = 0$ sind.

482. Die gesuchte Gleichung ist
$$y^2 - x^2 - 10x = 0.$$
Welches sind die Mittelpunktskoordinaten, welches die Achsen der Hyperbel?

483. Man hat zwei Fälle zu unterscheiden. Man erhält
$$y = 0, \quad 3x^2 - y^2 - 2cx = 0,$$
wenn der Scheitel des kleineren Winkels im Koordinatenanfangspunkte liegt, im anderen Falle
$$y = 0, \quad 3x^2 - y^2 - 4cx + c^2 = 0.$$
Der Ort der Spitze wird also jedenfalls von der X-Achse und einer Hyperbel gebildet.

484. Eliminiert man aus den Gleichungen
$$y_1^2 = px_1, \quad y_2^2 = px_2,$$
$$2y_1\eta = p(x_1 + \xi), \quad 2y_2\eta = p(x_2 + \xi),$$
$$\cos^2\vartheta = \frac{16y_1^2y_2^2 + 8p^2y_1y_2 + p^4}{16y_1^2y_2^2 + 4p^2(y_1^2 + y_2^2) + p^4}$$
die Größen x_1, x_2, y_1, y_2, so findet man als Gleichung des geometrischen Ortes
$$\eta^2\cos^2\vartheta - \xi^2\sin^2\vartheta - \tfrac{1}{2}p\xi(1 + \cos^2\vartheta) - \frac{p^2}{16}\sin^2\vartheta = 0.$$
Für $\vartheta = 45^0$ ist der Ort eine gleichseitige Hyperbel, welche der Gleichung
$$\eta^2 - \xi^2 - \tfrac{3}{2}p\xi - \frac{p^2}{16} = 0$$
entspricht. Dagegen erhält man für $\vartheta = 90^0$:
$$\xi = -\tfrac{1}{4}p,$$
d. h. die Hyperbel degeneriert in die Direktrix der Parabel.

485. Der geometrische Ort ist eine Hyperbel, welche der Gleichung

$$y^2 - k^2x^2 - px = 0$$

entspricht.

486. Der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises beschreibt eine gleichseitige Hyperbel, deren Gleichung

$$xy - a \sin \frac{B}{2} \left(x \cos \frac{B}{2} - y \sin \frac{B}{2} \right) = 0$$

ist. (Vergl. Heft I, Lösung 170.) Welches sind die Gleichungen der Asymptoten der Kurve?

487. Die Seite c möge mit der X-Achse zusammenfallen und durch die Y-Achse halbiert werden, dann ist die Gleichung des geometrischen Ortes

$$36\, d^2y^2 - 36\,(c^2 - d^2)\,x^2 = -\, d^2\,(c^2 - d^2).$$

Wo liegen die Brennpunkte dieser Hyperbel?

488. Der geometrische Ort ist eine gleichseitige Hyperbel, welche der Gleichung

$$nxy - my - x + c = 0$$

entspricht. Die Asymptoten derselben sind $x = \frac{m}{n}$, $y = \frac{1}{n}$.

Wird der Scheitel der Parabel in den Koordinatenanfangspunkt verlegt, so nimmt die Gleichung des Ortes die Gestalt

$$nxy - x + c = 0$$

an.

489. $y^2 = \frac{a^2}{b^2}(x^2 - 2\,ax)$. Wie groß sind die Achsen dieser Hyperbel?

490. Der Schwerpunkt rückt auf der Hyperbel

$$9\,y^2 = \frac{b^2}{a^2}(9\,x^2 - 18\,ax + 8\,a^2)$$

fort, deren Halbachsen $\frac{a}{3}$ und $\frac{b}{3}$ sind.

491. Ist die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$, die Koordinaten des Punktes P aber a, 0, so daß $a > r$ ist, dann ist die Gleichung des geometrischen Ortes

$$4\,(a^2 - r^2)\,x^2 - 4\,a\,(a^2 - r^2)\,x - 4\,r^2y^2 = -\,(a^2 - r^2)^2.$$

Wie groß sind die Achsen dieser Hyperbel? (Vergl. Lösung 312.)

492. Man erhält:

1) $4(r_1 - r_2)^2 y^2 - 4\{a^2 - (r_1 - r_2)^2\} x^2 + 4a\{a^2 - (r_1 - r_2)^2\} x$
$= \{a^2 - (r_1 - r_2)^2\}^2,$

2) $4(r_1 + r_2)^2 y^2 - 4\{a^2 - (r_1 + r_2)^2\} x^2 + 4a\{a^2 - (r_1 + r_2)^2\} x$
$= \{a^2 - (r_1 + r_2)^2\}^2.$

Die Mittelpunkte der gegebenen Kreise sind die Brennpunkte der Hyperbeln. Wie groß sind die Achsen?

Ist $r_1 = r_2$, so degeneriert die erste der Hyperbeln in die Gerade $x = \frac{a}{2}$. (Vergl. die Lösungen 313 bis 315.)

493. Man erhält zwei gleichseitige Hyperbeln, welche der Gleichung

$$yx = \pm rx \mp r^2$$

entsprechen.

494. Die Gleichungen der beiden Sehnen sind

$$y = (x + r)\operatorname{tg}\alpha, \quad y \operatorname{tg}\alpha = (x - r);$$

demnach erhält man nach Elimination von $\operatorname{tg}\alpha$ die Gleichung des geometrischen Ortes

$$y^2 - x^2 = -r^2.$$

495. Die Pole liegen auf der Hyperbel

$$4r^2y^2 - p^2x^2 = -r^2p^2.$$

496. Die Pole liegen auf der gleichseitigen Hyperbel

$$Lxy - Ny = k^2M.$$

497. Man erhält

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2 - r_1^2} - \sqrt{x^2 + y^2 - r_2^2} = d,$$

und daraus

$$4d^2y^2 - 4(a^2 - d^2)x^2 + 4a(a^2 + r_2^2 - r_1^2 - d^2)x$$
$$= 4d^2r_2^2 + (a^2 + r_2^2 - r_1^2 - d^2)^2.$$

498. Man findet

$$a^2y^2 - (4r^2 - a^2)x^2 - 4ar^2x = a^2r^2.$$

Daraus folgt: Der geometrische Ort ist für $4r^2 > a^2$ eine Hyperbel, für $4r^2 = a^2$ eine Parabel, für $4r^2 < a^2$ eine Ellipse.

499. Die Differenz der Leitstrahlen des Punktes P ist gleich dem Durchmesser des Hauptkreises, der die Gerade F_1F_2 in den Scheiteln schneidet.

500. Man findet leicht zwei Punkte der Peripherie des Hauptkreises.

Determination. Die Lösung ist nur dann möglich, wenn t die Strecke F_1F_2 schneidet und zwar unter einem Winkel, der von 90^0 verschieden ist.

501. Es läßt sich leicht ein zweiter geometrischer Ort für den Brennpunkt F_2 konstruieren.

502. Fällt man von F_1 ein Lot auf a_1, so ist der Fußpunkt des Lotes ein Punkt der Peripherie des Hauptkreises.

Determination. Es ergeben sich zwei Mittelpunkte, also auch zwei Hyperbeln.

503. Man bestimme zunächst die Lage der Brennpunkte.

Determination. Es lassen sich zwei Hyperbeln konstruieren.

504. Fällt man von F_1 Lote auf die Geraden t_1, t_2, t_3, so sind die Fußpunkte derselben Punkte des Hauptkreises.

Determination. Die Konstruktion läßt sich nur dann ausführen, wenn F_1 außerbalb des Hauptkreises liegt.

505. Vergl. die Lösung 327. Zur Bestimmung der Lage der Brennpunkte läßt sich eine Tangente benutzen.

506. Determination. Es lassen sich zwei verschiedene Hyperbeln konstruieren.

507. Man konstruiere zunächst die Koordinaten des Punktes $P\ (x_1, y_1)$ und benutze zur Bestimmung der imaginären Achse die Formel $b^2 = \frac{a^2 y_1^2}{x_1^2 - a^2}$. Wann läßt sich die Konstruktion nicht ausführen.

508. Konstruiert man zunächst den Hauptkreis, so lassen sich leicht geometrische Örter für die Brennpunkte finden.

Determination. Die Konstruktion ist nur möglich, wenn die Tangente t von dem Hauptkreise geschnitten wird.

509. Legt man durch P ein Büschel von Strahlen, so kann man mit Hilfe von Lösung 474 beliebig viele Punkte der Hyperbel finden. Derjenige Strahl, welcher im Punkte P halbiert wird, kann zur Bestimmung der Scheitel benutzt werden.

510. Halbiert man den Abschnitt der Tangente, welcher zwischen den beiden Asymptoten liegt, so erhält man einen Punkt der Hyperbel. Über die Fortsetzung der Konstruktion siehe die vorhergehende Lösung.

511. Das Mittel zur Konstruktion bietet die Lösung 452.

512. Man bestimmt durch eine einfache Konstruktion zunächst die Längen der Achsen.

513. Es lassen sich leicht zwei Punkte der zweiten Asymptote finden.

514. Durch das Verhältnis der Achsen ist die Richtung der zweiten Asymptote bestimmt.

515. Verbindet man die beiden Punkte P_1 und P_2 und verlängert diese Gerade bis zum Durchschnitt mit der Asymptote a_1, so kann man einen Punkt der zweiten Asymptote bestimmen. Über die Fortsetzung der Konstruktion siehe Lösung 509.

516. Mit Hilfe der beiden Geraden $P_1 P_2$, $P_2 P_3$ kann man zwei Punkte der zweiten Asymptote finden.

517. Der Abschnitt von t_3, welcher zwischen t_1 und t_2 liegt, wird von jedem Brennpunkte aus unter rechtem Winkel gesehen; demnach findet man leicht einen geometrischen Ort der Brennpunkte. Ein zweiter Ort ist die Hauptachse.

518. $J = a^2 \log \text{nat} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)$.

Beispiel. 16,4925 ... □.

519. Es sei α der Koordinatenwinkel, den die beiden Asymptoten einschließen, dann ist

$$J = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2) \,.\, \sin\alpha \,.\, \log \text{nat} \left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

Beispiel. 28,0318 ... □.

520. Zieht man durch P_1 und P_2 Parallelen zu der einen Asymptote, welche die andere in Q_1 und Q_2 schneiden, so lehrt eine einfache Betrachtung, daß der Inhalt des Sektors gleich dem der Figur $P_1 P_2 Q_2 Q_1$ ist, der sich nach der vorhergehenden Lösung leicht bestimmen läßt.

521. Da der den Sehnen konjugierte Durchmesser jedes der Segmente, welches durch eine Sehne abgetrennt wird, halbiert, so ergiebt sich $OP_1Q_1 = OP_2Q_2$.

522. $J = ab \,.\, \log \text{nat} \left(\frac{d + \sqrt{d^2 - a^2}}{a}\right)$.

Beispiel. $J = 24{,}1416 \ldots$ □.

523. $J = \frac{db}{a}\sqrt{d^2 - a^2} - ab \,.\, \log \text{nat} \left(\frac{d + \sqrt{d^2 - a^2}}{a}\right)$.

Beispiel. $J = 15 - \frac{148}{\sqrt{21}} \cdot \log \operatorname{nat} \left(\frac{5\sqrt{7} + 3\sqrt{3}}{\sqrt{148}} \right).$

524. $J = \frac{2af}{b}\sqrt{f^2 + b^2} + 2ab \cdot \log \operatorname{nat} \left(\frac{f + \sqrt{f^2 + b^2}}{b} \right).$

525. Der Inhalt eines jeden der vier Flächenstücke ist gleich

$$\frac{a^2 e}{2b} + \frac{ab}{2} \cdot \log \operatorname{nat} \left(\frac{a + e}{b} \right) - \frac{a^2 \pi}{4}.$$

Die Kurven zweiten Grades.

526. Der gegebenen Gleichung entspricht:

1. α) eine reelle Ellipse,
   β) ein Punkt,
   γ) eine imaginäre Ellipse;
2. α) eine Parabel,
   β) zwei parallele Gerade, welche entweder getrennt liegen oder zusammenfallen und reell oder imaginär sind,
   γ) eine Parabel;
3. α) eine Hyperbel,
   β) zwei sich schneidende Gerade,
   γ) eine Hyperbel.

527. Die Kurven, welche den gegebenen Gleichungen entsprechen, sind:

a) eine imaginäre Ellipse;
b) eine reelle Ellipse;
c) zwei sich schneidende Gerade, deren Gleichungen $x - 3y + 2 = 0$, $2x + y + 5 = 0$ sind;
d) eine Hyperbel;
e) zwei parallele Gerade, deren Gleichungen $3x - 2y + 1 = 0$, $3x - 2y - 9 = 0$ sind;
f) eine Parabel;
g) zwei parallele Gerade, welche zusammenfallen und der Gleichung $5x + 4y + 7 = 0$ entsprechen;
h) ein Punkt;
i) eine Hyperbel;
k) eine Hyperbel;
l) eine reelle Ellipse;

m) eine Hyperbel;

n) ein reeller Punkt, in dem sich die beiden imaginären Geraden $3y-2ix+9+2i=0$, $3y+2ix+9-2i=0$ durchschneiden;

o) ein Kreis mit den Mittelpunktskoordinaten $a=-3$, $b=2$ und dem Radius $r=4$.

528. Die Gleichungen der Örter sind:

$$Bx+Cy+E=0,\quad Ax+By+D=0.$$

Beispiele. 1. $x+2y+3=0,\quad 2x+y+2=0;$
2. $5x+7y+1=0,\quad 3x+5y+2=0.$

529. Da in diesem Falle $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=0$ ist, so müssen die beiden Geraden parallel laufen.

Beispiel. $9x-3y+2=0,\quad 6x-2y-3=0.$

530. Mit Hilfe der Lösung 528 findet man die Koordinaten

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -D & -E \\ B & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} A & B \\ -D & -E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}.$$

Beispiele. 1. $x=-\frac{1}{3},\quad y=-\frac{4}{3};$
2. $x=2\frac{1}{4},\quad y=-1\frac{3}{4};$
3. $x=\infty,\quad y=\infty.$

531. Die Konstante F muß gleich Null sein.

532. Die Kurve berührt a) die X-Achse, wenn $D^2-AF=0$, b) die Y-Achse, wenn $E^2-CF=0$ ist.

533. Man erhält:

$$Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2+2(Aa+Bb+D)x_1+2(Ba+Cb+E)y_1 \\ +Aa^2+2Bab+Cb^2+2Da+2Eb+F=0.$$

Die drei ersten Konstanten bleiben demnach bei einer Verschiebung des Koordinatensystems unverändert. Welche Regel läßt sich für die Bildung der drei letzten Koeffizienten aufstellen? (Vergl. Lösung 528.)

534. Für das neue Achsensystem lautet die Gleichung:

$$Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2+F_1=0,$$

wo

$$F_1 = \frac{\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}$$

ist.

Beispiele. 1. $x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2 - 5\frac{1}{3} = 0$.

2. $3x_1^2 + 10x_1 y_1 + 7y_1^2 + 3\frac{3}{4} = 0$.

3. $3x_1^2 - 4x_1 y_1 + 5y_1^2 - 183\frac{4}{11} = 0$.

535. Da in diesem Falle $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0$ ist, so würde $F_1 = \infty$ sein.

536. Setzt man nach Heft I, Lösung 30

$$x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha,$$
$$y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha,$$

so erhält man die Größe des Drehungswinkels α durch die Relation

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C}.$$

Die Gleichung der Linie nimmt die Gestalt an

$$\tfrac{1}{2}\left\{A + C - \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}\right\} x_1^2$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left\{A + C + \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}\right\} y_1^2 + K = 0.$$

Die alleinstehende Konstante K erleidet bei der Drehung keine Veränderung.

Beispiele.

1. $\operatorname{tg} 2\alpha = -2, \quad \angle \alpha = 58^0\, 16'\, 57''$,

$\frac{1}{2}\left\{17 - 3\sqrt{5}\right\} x_1^2 + \frac{1}{2}\left\{17 + 3\sqrt{5}\right\} y_1^2 = 30;$

2. $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{16}{29}, \quad \angle \alpha = 14^0\, 26'\, 36''$,

$\frac{1}{2}\left\{-11 - \sqrt{1097}\right\} x_1^2 + \frac{1}{2}\left\{-11 + \sqrt{1097}\right\} y_1^2 = 60.$

537. Es ist $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{A}{B} = -\frac{B}{C}$; demnach die Gleichung

$$\frac{A^2 + B^2}{A} y_1^2 + 2\left(\frac{BD - AE}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) x_1 + 2\left(\frac{AD + BE}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) y_1 + F = 0.$$

Beispiel. $\operatorname{tg}\alpha = 3, \quad \angle \alpha = 71^0\, 33'\, 54{,}2''$,

$$10\sqrt{10}\, y_1^2 - 13x_1 + 9y_1 + 10\sqrt{10} = 0.$$

538. Die Kurve ist eine Ellipse, deren Achsen

$$2a = \tfrac{1}{11}\sqrt{4034\,(8+2\sqrt{5})},$$
$$2b = \tfrac{1}{11}\sqrt{4034\,(8-2\sqrt{5})}$$

sind.

539. Die Kurve ist eine Hyperbel, deren Achsen

$$2a = \tfrac{2}{5}\sqrt{2\,(3+\sqrt{29})},$$
$$2ib = \tfrac{2}{5}\sqrt{2\,(3-\sqrt{29})}$$

sind.

540. Es ist

$$e = \frac{1}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}\sqrt{-\sqrt{(A-C)^2+4B^2}\cdot\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}}.$$

Beispiel. $2e = 5\frac{1}{3}$.

541. $p = \frac{6}{125}$.

542. Setzt man in der Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$
$$x = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta, \quad y = x_1\sin\alpha + y_1\sin\beta,$$

so ergiebt sich

$$\begin{aligned}(A\cos^2\alpha + B\sin 2\alpha + C\sin^2\alpha)\,{x_1}^2 &+ 2\,(A\cos\alpha\cos\beta + B\sin[\alpha+\beta] \\ &+ C\sin\alpha\sin\beta)\,x_1y_1 + (A\cos^2\beta + B\sin 2\beta + C\sin^2\beta)\,{y_1}^2 \\ &+ 2\,(D\cos\alpha + E\sin\alpha)\,x_1 + 2\,(D\cos\beta + E\sin\beta)\,y_1 + F = 0.\end{aligned}$$

543. Wird die allgemeine Gleichung zweiten Grades durch eine der Konstanten z. B. durch F dividiert, so enthält sie noch fünf Konstante, zu deren Bestimmung fünf Stücke gegeben sein müssen. Sind die gegebenen Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5), so erhält man nach Einsetzung derselben in die Gleichung zweiten Grades und nach Elimination von $\frac{A}{F}, \frac{B}{F}, \frac{C}{F}, \frac{D}{F}, \frac{E}{F}$ folgende Relation als Gleichung der Linie zweiter Ordnung:

$$\begin{vmatrix} x^2 & {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 & {x_4}^2 & {x_5}^2 \\ xy & x_1y_1 & x_2y_2 & x_3y_3 & x_4y_4 & x_5y_5 \\ y^2 & {y_1}^2 & {y_2}^2 & {y_3}^2 & {y_4}^2 & {y_5}^2 \\ x & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

544. In diesem Falle entsprechen der Gleichung zwei gerade Linien; die Gleichung der zweiten Geraden ist

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

545. Da zwischen den drei ersten Koeffizienten die Relation $AC - B^2 = 0$ bestehen muß, so ist es ausreichend, wenn vier Punkte gegeben sind, von denen aber nur je zwei in einer geraden Linie liegen dürfen.

546. Der Punkt durchläuft die Parabel

$$y^2 = 2x.$$

547. Die Linie zweiten Grades besteht aus den beiden Geraden

$$y - 3x + 2 = 0, \quad 8y - 3x + 43 = 0.$$

548. Die Linie ist eine Ellipse, deren Gleichung

$$2x^2 - 2xy + y^2 + x - 2y + 1 = 0$$

ist.

549. Die gesuchte Kurve ist eine Hyperbel, welche der Gleichung

$$36y^2 - x^2 - 8x = 0$$

entspricht.

550. Zur Bestimmung der Konstanten kann man die Gleichungen

$$AC - B^2 = 0, \quad AF - D^2 = 0, \quad CF - E^2 = 0,$$
$$16A + 8D + F = 0, \quad 9C + 6E + F = 0$$

benutzen. Man findet als Gleichung der Parabel

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 72x - 96y + 144 = 0.$$

Der Gleichung

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 72x - 96y + 144 = 0,$$

welche sich außerdem ergiebt, entspricht eine Doppelgerade, welche durch die beiden gegebenen Berührungspunkte geht.

551. $3x^2 - 8xy + 5\frac{1}{3}y^2 - 48x - 64y + 192 = 0.$

552. Die Kurve ist eine Hyperbel, welche der Gleichung

$$x^2 + 16xy + 4y^2 + 16x - 32y + 64 = 0$$

entspricht.

553. Betrachtet man die beiden Schenkel des Winkels α als Koordinatenachsen und bezeichnet den Abschnitt der Strecke q vom

Punkte P bis zum Endpunkte in der Y-Achse mit a, den andern mit b, so erhält die Gleichung der Kurve die Gestalt

$$a^2y^2 - 2ab\cos\alpha . xy + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Der geometrische Ort ist eine Ellipse. Wie groß sind die Achsen derselben? (Vergl. Lösung 299.)

554. Fällt der eine Endpunkt von c mit dem Koordinatenanfangspunkte, c selbst mit dem positiven Teile der X-Achse zusammen und sind f und g die Abschnitte der Seite c, so ist die Gleichung des Ortes

$$4(g-f)^2y^2 - 4\{c^2-(g-f)^2\}(x^2-cx) = \{(g-f)^2-c^2\}^2.$$

Die Spitze beschreibt eine Hyperbel. Wie groß sind die Achsen derselben?

555. Der geometrische Ort ist eine Hyperbel, welche der Gleichung

$$2y^2 - 2Myx - 2y_1y + My_1x = 0$$

entspricht.

556. Der Punkt P befindet sich auf der Ellipse

$$3x^2 - 2xy + y^2 - 2k^2 = 0.$$

Unter welchem Winkel ist die Hauptachse gegen die X-Achse geneigt? Wie groß sind beide Achsen?

557. Man erhält

$$M^2x^2 - 2Myx - M^2y^2 - d^2(1+M^2) = 0,$$

oder

$$M^2x^2 - 2Myx - M^2y^2 + d^2(1+M^2) = 0.$$

Der geometrische Ort ist jedenfalls eine Hyperbel. Bestimme die Richtung der Hauptachse.

558. $Mxy - y^2 + q^2\sqrt{1+M^2} = 0.$

Der geometrische Ort ist eine Hyperbel, deren Lage sich leicht bestimmen läßt.

559. Die Grundlinie c möge mit dem positiven Teile der X-Achse, der eine Endpunkt mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammenfallen. Liegt der Scheitel des kleineren Winkels im Koordinatenanfangspunkte, und ist die Tangente der konstanten Winkeldifferenz k, so ergiebt sich

$$kx^2 + 2yx - ky^2 - kcx - cy = 0;$$

liegt dagegen der Scheitel des größeren Winkels im Koordinatenanfangspunkte, so ist die gesuchte Gleichung

$$kx^2 - 2yx - ky^2 - kcx + cy = 0.$$

Der geometrische Ort der Spitze ist in jedem der beiden Fälle eine Hyperbel.

560. Man erhält

$$x^2 - 4xy \cot A + (4 \cot^2 A + 1) y^2 = \tfrac{1}{9} a^2,$$

d. h. der Schwerpunkt bewegt sich auf einer Ellipse, deren Mittelpunkt im Koordinatenanfangspunkte liegt, und deren Achsen den Winkel A und dessen Nebenwinkel halbieren. Dreht man das Koordinatensystem um den Winkel $\frac{A}{2}$, so ergiebt sich

$$x^2 \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} + y^2 \cot^2 \frac{A}{2} = \frac{a^2}{9}.$$

Wie groß ist das Rechteck aus den Achsen dieser Ellipse?

561. Die Gleichung des Ortes ist

$$\left(2x \sin^2 \frac{B}{2} + y \sin B\right)^2 = y \left(8R \sin^2 \frac{B}{2} - y\right),$$

d. h. die Kurve ist eine Ellipse, welche im Nullpunkte von der X-Achse berührt wird, und die Y-Achse in der Entfernung $\dfrac{8R \sin^2 \frac{B}{2}}{1 + \sin^2 B}$ vom Koordinatenanfangspunkte schneidet. Die Koordinaten des Mittelpunktes sind:

$$x_1 = -2R \sin B, \qquad y_1 = 4R \sin^2 \frac{B}{2}.$$

Einfacher gestaltet sich das Resultat, wenn $B = 90^0$ gesetzt wird:

$$x^2 + 2xy + 2y^2 - 4Ry = 0.$$

Die Koordinaten des Mittelpunktes sind dann:

$$x_1 = -2R, \qquad y_1 = +2R,$$

daher die Mittelpunktsgleichung

$$x^2 + 2xy + 2y^2 - 4R^2 = 0;$$

die beiden Achsen der Ellipse sind:

$$4R\sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{3\sqrt{2} - 4}}, \qquad 4R\sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{3\sqrt{2} - 2}}.$$

562. Es ergiebt sich

$$y^2 \sin A - 4y\left(x + 2b \sin^2 \frac{A}{2}\right) \sin^2 \frac{A}{2} + 4b^2 \sin A \sin^4 \frac{A}{2} = 0.$$

Der fünfte merkwürdige Punkt bewegt sich auf einer Hyperbel, deren Mittelpunkt $\left(-2b \sin^2 \frac{A}{2}, 0\right)$ ist.

Durch Verschiebung und Drehung des Koordinatensystems erhält man

$$\frac{\left(\cos^2 \vartheta + \sin 2\vartheta \,.\, \operatorname{tg} \frac{A}{2}\right) y^2}{4b^2 \sin^4 \frac{A}{2}} - \frac{\left(\sin 2\vartheta \,.\, \operatorname{tg} \frac{A}{2} - \sin^2 \vartheta\right) x^2}{4b^2 \sin^4 \frac{A}{2}} = -1,$$

wenn $\operatorname{tg} 2\vartheta = 2 \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ ist.

563. Der Höhenpunkt beschreibt eine Hyperbel, deren Gleichung

$$x^2 + Mxy - cx + ny = 0$$

ist. Dreht man die gegebene Gerade um den Punkt $(0, n)$, bis sie der X-Achse parallel läuft, so geht die vorstehende Gleichung über in

$$x^2 - cx + ny = 0,$$

d. h. der Höhenpunkt beschreibt eine Parabel.

564. Die Endpunkte der Ordinaten liegen auf einer Ellipse; die Gleichung derselben ist

$$x^2 + 2nxy + y^2(1 + n^2) = r^2.$$

Der Neigungswinkel α der Hauptachse der Ellipse zur X-Achse ist bestimmt durch die Relation

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2}{n}.$$

565. Die Gleichung des geometrischen Ortes ist die Resultante der Gleichungen

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{b^2 x_1}{a^2 \eta} \operatorname{tg} \alpha + \frac{b^2 (\eta - y_1)}{a^2 \eta} = 0,$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{y_1}{\xi - x_1} \operatorname{tg} \alpha + \frac{b^2 \xi}{a^2 (\xi - x_1)} = 0,$$

nämlich

$$a^2\eta^2 + b^2\xi^2 - a^2 y_1 \eta - b^2 x_1 \xi = 0.$$

Wie groß sind die Achsen dieser Ellipse?

566. Der Punkt P beschreibt eine Ellipse, deren Gleichung

$$x^2 + xy + y^2 - rx = 0$$

ist. Größe und Lage der Achsen sind zu bestimmen.

567. Man erhält die Gleichung des geometrischen Ortes

$$y_2(y - y_1)(y - y_2) + \{x_2(y - y_1) + y_1 x\}(x - x_2) = 0.$$

Beispiel. $5x^2 + 3xy + y^2 - 30x - 15y + 50 = 0.$

Die Kurve ist eine Ellipse. Bestimme Lage und Größe der Achsen.

568. Der geometrische Ort des Punktes P entspricht der Gleichung

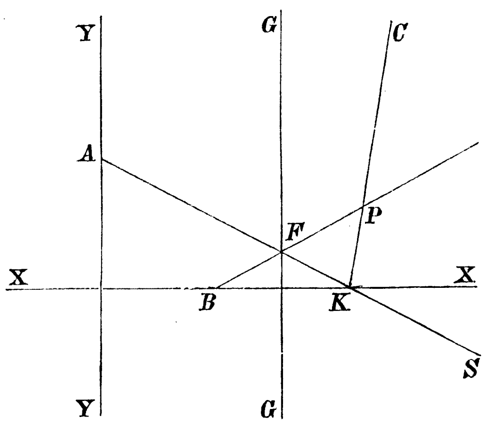
$$y_1 y_3 x^2 - \{a(y_3 - y_1) + x_3 y_1 - x_2 y_3\} xy + x_3(a - x_2) y^2$$
$$- y_1 y_3 (x_2 + a) x - x_2 y_1 (a - x_3) y + a x_2 y_1 y_3 = 0.$$

(s. Fig. 3.)

Beispiel. $10x^2 - 11xy + 8y^2 - 80x + 18y + 150 = 0.$

Richtung und Größe der Hauptachse dieser Ellipse lassen sich leicht finden.

Fig. 3.



569. Der Punkt P beschreibt eine Hyperbel, deren Gleichung

$$18x^2 - 96xy - 41y^2 + 288x + 753y - 1890 = 0$$

ist.

570. Bezeichnet man die Abscisse des Punktes L mit OR, so ist

$$b : y = a + OR : a + x, \quad y : OF = x - a : a, \quad OF : b = OR - a : a,$$

demnach

$$y : b = (x - a)(OR - a) : a^2.$$

Durch Elimination von OR erhält man

$$b^2x^2 - 2abxy - a^2y^2 + 2a^2by - a^2b^2 = 0.$$

Der Punkt P beschreibt demnach eine Hyperbel.

571. Die Gleichung des geometrischen Ortes ist

$$(a^2 - 4r^2)\, y^2 - 2a^2 r y - 4r^2 x^2 + r^2 (4r^2 + a^2) = 0.$$

Welche Kurve entspricht dieser Gleichung

1. für $a > 2r$, 2. für $a = 2r$, 3. für $a < 2r$?

572. Die Schnittpunkte sind getrennt und reell, sie fallen zusammen, sind imaginär, wenn

$$(Bn + D)^2 + EM\,(EM - 2Bn) + 2DM\,(E + Cn) \\ - An\,(Cn + 2E) - F\,(A + 2BM + CM^2) \gtreqless 0$$

ist. Jede Kurve zweiten Grades gehört der zweiten Ordnung an, da sie von einer Geraden in zwei Punkten geschnitten wird.

573. Die Koordinaten der Schnittpunkte sind:

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{-5 \pm \sqrt{37}}{6}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \frac{-4 \mp \sqrt{37}}{3}.$$

574. Die Schnittpunkte sind imaginär und besitzen die Koordinaten

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{-9 \pm i\sqrt{119}}{25}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \frac{-32 \mp 2i\sqrt{119}}{25}.$$

575. Die Gleichung ist

$$L_1 L_2 + k L_1' L_2' = 0.$$

Dieselbe ist vom zweiten Grade und gehört demnach einer Linie zweiter Ordnung an. Es läßt sich leicht zeigen, daß diese Kurve durch die betreffenden Schnittpunkte geht.

576. Die gesuchte Gleichung ist

$$\left(\frac{x}{p_1} + \frac{y}{q_1} - 1\right)\left(\frac{x}{p_2} + \frac{y}{q_2} - 1\right) + kxy = 0$$

oder

$$\frac{x^2}{p_1 p_2} + xy\left(\frac{1}{p_1 q_2} + \frac{1}{p_2 q_1} + k\right) + \frac{y^2}{q_1 q_2} - x\frac{(p_1 + p_2)}{p_1 p_2} - y\frac{(q_1 + q_2)}{q_1 q_2} + 1 = 0.$$

Soll die Kurve eine Parabel sein, so ist

$$k = -\frac{1}{p_1 q_2} - \frac{1}{p_2 q_1} \pm \frac{2}{\sqrt{p_1 p_2 q_1 q_2}}$$

zu setzen.

577. $23x^2 + 38xy + 44y^2 - 62x - 164y = 0.$

Der Kegelschnitt ist eine Ellipse.

578. Es ist $k = -\frac{2}{3}$, demnach die gesuchte Gleichung

$$2x^2 - 33xy - 14y^2 + 20x + 44y - 24 = 0;$$

der Kegelschnitt ist eine Hyperbel.

579. Zur Bestimmung von k erhält man die Relation

$$16k^2 - 6k(3 + 2k) = 0.$$

Für $k = 0$ ergiebt sich das erste Geradenpaar, für $k = 4\frac{1}{2}$ die Ellipse

$$24x^2 + 23xy + 39y^2 - 72x - 81y + 54 = 0.$$

580. Der Kegelschnitt ist eine Hyperbel, welche der Gleichung

$$74x^2 + 340xy + 374y^2 - 375x - 825y + 450 = 0$$

entspricht.

581. Betrachtet man die beiden Sekanten als Koordinatenachsen, so hat die Gleichung der Kurve stets die Form

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0;$$

demnach sind die gesuchten Rechtecke

$$x_1 . x_2 = \frac{F}{A}, \quad y_1 . y_2 = \frac{F}{C},$$

also $x_1 . x_2 : y_1 . y_2 = C : A.$

Bei der angedeuteten Verschiebung bleiben die Konstanten A und C unverändert, also behält auch das Verhältnis denselben Wert.

582. Läuft die X-Achse der Achse der Parabel parallel, so ist die Gleichung derselben

$$2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

also ist

$$x_1 = -\frac{F}{2D}, \quad y_1 . y_2 = \frac{F}{C};$$

demnach

$$x_1 : y_1 . y_2 = -C : 2D.$$

Welche Folgerung läßt sich daraus ziehen?

583. Die gesuchte Gleichung ist

$$(CF - E^2)u^2 + 2(DE - BF)uv + (AF - D^2)v^2$$
$$+ 2(BE - CD)u + 2(BD - AE)v + AC - B^2 = 0.$$

584. Zur Aufstellung der Bedingungen benutzt man folgende Sätze:

An die Ellipse lassen sich von jedem Punkte der unendlich fernen Geraden zwei reelle Tangenten ziehen. An eine Hyperbel lassen sich nur von den Punkten der unendlich fernen Geraden, welche außerhalb der Kurve liegen, zwei reelle Tangenten legen. An die Parabel endlich läßt sich von jedem Punkte der unendlich fernen Geraden nur eine einzige ins Endliche gelangende reelle Tangente legen, da die unendlich ferne Gerade selbst eine Tangente der Kurve ist.

Es sei $u - kv = 0$ die Gleichung eines unendlich fernen Punktes. Durch Elimination von u aus dieser und der gegebenen Gleichung erhält man

$$v = \frac{-(D_1 k + E_1) \pm \sqrt{(D_1^2 - A_1 F_1) k^2 - 2(B_1 F_1 - D_1 E_1) k + E_1^2 - C_1 F_1}}{A_1 k^2 + 2 B_1 k + C_1}.$$

Die Diskriminante der Form unter der Quadratwurzel ist

$$F_1 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ B_1 & C_1 & E_1 \\ D_1 & E_1 & F_1 \end{vmatrix}.$$

Bezeichnet man demnach die Determinante mit $\varDelta$, so ergiebt sich:

Der gegebenen Gleichung entspricht

1. eine Ellipse, wenn $F_1 \varDelta > 0$ ist,
2. eine Parabel, wenn $F_1 = 0$, $\varDelta \gtrless 0$,
3. eine Hyperbel, wenn $F_1 \varDelta < 0$ ist.

585. $$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix} < 0, \qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ B_1 & C_1 & E_1 \\ D_1 & E_1 & F_1 \end{vmatrix} = 0.$$

586. $$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ D_1 & E_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ D_1 & F_1 \end{vmatrix} = 0.$$

587. Der Gleichung entsprechen die beiden Punkte

$$3u + 2v + 1 = 0, \qquad 7u + v + 1 = 0.$$

588. Der Punkt $5u + 3v + 1 = 0$.

589. Die Enveloppe ist eine Parabel, welche der Gleichung

$$10u^2 + 30uv + 20v^2 - 3u + 9v = 0$$

entspricht.

590. Man erhält

$$4u^2 + 140uv + 600v^2 + 11u + 130v + 5 = 0.$$

Die Enveloppe ist demnach eine Ellipse.

Wie gestaltet sich das Resultat, wenn P innerhalb des stumpfen Winkels liegt, der von den beiden Geraden gebildet wird?

591. Die Gleichung der Enveloppe ist

$$\delta u^2 - \delta uv + \delta v^2 + u = 0;$$

die Tangenten des Kreisbüschels werden also von einer Parabel eingehüllt.

592. Es ergiebt sich als Gleichung der Einhüllenden

$$r^2u^2 + (r^2 - k^2)v^2 - 1 = 0,$$

d. h. die Lote werden für $k > r$ von einer Hyperbel, für $k < r$ von einer Ellipse eingehüllt. Dagegen bilden dieselben für $k = r$ zwei Büschel, deren Mittelpunkte $(r, 0)$ und $(-r, 0)$ sind.

593. Die Polaren des Punktes P werden von einer Parabel eingehüllt, deren Gleichung

$$e^2uv - y_1u + x_1v = 0$$

ist.

594. Die Enveloppe der Tangenten ist eine Parabel, welche der Gleichung

$$2uv + 2v^2 + u - v = 0$$

entspricht.

595. Die Gleichungen der gesuchten Geraden sind:

$$y = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{C}x, \quad y = \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{C}x.$$

596. Durch Vergleichung der Lösungen 526 und 595 findet man:

Die Ellipse hat zwei imaginäre unendlich ferne Punkte, die Parabel hat einen einzigen reellen unendlich fernen Punkt, die Hyperbel endlich besitzt zwei reelle unendlich ferne Punkte.

597. Bezeichnen wir die Koordinaten eines Teilungspunktes mit x, y, so ist

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}, \quad y = \frac{y_1 - ky_2}{1 - k}.$$

Durch Einsetzung dieser Werte in die Gleichung des Kegelschnittes erhält man

$$U_{22}k^2 - 2U_{12}k + U_{11} = 0,$$

worin

$$U_{11} = Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + 2Dx_1 + 2Ey_1 + F,$$
$$U_{12} = (Ax_1 + By_1 + D)x_2 + (Bx_1 + Cy_1 + E)y_2 + Dx_1 + Ey_1 + F,$$
$$U_{22} = Ax_2^2 + 2Bx_2y_2 + Cy_2^2 + 2Dx_2 + 2Ey_2 + F$$

ist. Entwickelt man aus dieser Gleichung die beiden Wurzeln k_1 und k_2 und setzt diese Werte in die obigen Gleichungen ein, so erhält man die Koordinaten der Punkte, in denen die Gerade P_1P_2 von dem Kegelschnitte geschnitten wird.

598. Auflösung I. Verlegt man in der vorhergehenden Lösung die beiden Punkte P_1 und P_2 auf den Kegelschnitt selbst, und zwar so, daß beide unendlich nahe aneinander liegen, so wird $U_{11} = 0$ und $U_{22} = 0$. Es muß demnach auch $U_{12} = 0$ werden, d. h. jeder Punkt, dessen Koordinaten der Gleichung $U_{12} = 0$ genügen, muß auf der Tangente am Punkte (x_1y_1) des Kegelschnittes liegen. Die Gleichung der Tangente ist sonach

$$(Ax_1 + By_1 + D)x + (Bx_1 + Cy_1 + E)y + Dx_1 + Ey_1 + F = 0.$$

Auflösung II. Sind (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zwei Punkte des Kegelschnittes, so ist die Richtungskonstante ihrer Verbindungslinie

$$-\frac{A(x_1 + x_2) + B(y_1 + y_2) + 2D}{B(x_1 + x_2) + C(y_1 + y_2) + 2E}.$$

Läßt man die beiden Punkte unendlich nahe aneinander rücken, so daß die Sehne in die Tangente übergeht, so erhält man als Gleichung derselben

$$y - y_1 = -\frac{Ax_1 + By_1 + D}{Bx_1 + Cy_1 + E}(x - x_1),$$

die sich leicht in die vorhergefundene Form überführen läßt.

Beispiel. $3x + y - 3 = 0.$

599. Man nimmt auf dem Kegelschnitte die Punkte A, B, C, D an und zieht die Verbindungslinien zwischen je zwei aufeinander folgenden. Verlängert man nun AB und DP bis zum Schnitt in L, PA und CD bis zum Schnitt in M, endlich BC bis zum Schnitt mit LM in N, so ist N ein zweiter Punkt der Tangente, also PN die gesuchte Tangente. (Siehe Lehrsatz des Pascal.)

600. Die in Aufgabe und Lösung 597 betrachtete Sekante des Kegelschnittes ist eine Tangente der Kurve, wenn die beiden Wurzeln der Gleichung

$$U_{22}k^2 - 2\,U_{12}k + U_{11} = 0$$

gleich sind, d. h. wenn

$$U_{11}U_{22} - U_{12}^2 = 0$$

ist. Genügen also die Koordinaten eines beliebigen Punktes dieser Gleichung, wenn sie an Stelle von x_2, y_2 eingesetzt werden, so liegt derselbe auf einer von dem Punkte $P(x_1, y_1)$ an den Kegelschnitt gelegten Tangente. Das System der Tangenten, die sich von (x_1, y_1) an den Kegelschnitt legen lassen, entspricht also der Gleichung:

$$(Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F)(Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2+2Dx_1+2Ey_1+F) \\ - \{(Ax_1+By_1+D)x+(Bx_1+Cy_1+E)y+Dx_1+Ey_1+F\}^2 = 0$$

Man erhält demnach zwei Tangenten, welche entweder reell oder imaginär sein können. Die Kegelschnitte gehören der **zweiten Klasse** an.

601. Die beiden Tangenten sind imaginär und entsprechen den Gleichungen

$$4x + (3 - 2i\sqrt{3})\,y = 0, \quad 4x + (3 + 2i\sqrt{3})\,y = 0.$$

602. $38y - (79 + 3\sqrt{1407})\,x - 76 = 0,$

$38y - (79 - 3\sqrt{1407})\,x - 76 = 0.$

603. $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2\sqrt{-F\varDelta}}{F(A+C)-(D^2+E^2)},$

wo

$$\varDelta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

ist.

604. Zur Bestimmung der Konstanten des Kegelschnittes erhält man folgende Gleichungen:

$$L_1^2(CF-E^2)+M_1^2(AF-D^2)+N_1^2(AC-B^2)+2M_1N_1(BD-AE) \\ +2L_1N_1(BE-CD)+2L_1M_1(ED-BF)=0,$$

$$L_2^2(CF-E^2)+M_2^2(AF-D^2)+N_2^2(AC-B^2)+2M_2N_2(BD-AE) \\ +2L_2N_2(BE-CD)+2L_2M_2(ED-BF)=0,$$

$$L_3^2(CF-E^2)+M_3^2(AF-D^2)+N_3^2(AC-B^2)+2M_3N_3(BD-AE) \\ +2L_3N_3(BE-CD)+2L_3M_3(ED-BF)=0,$$

$$L_4^2(CF-E^2)+M_4^2(AF-D^2)+N_4^2(AC-B^2)+2M_4N_4(BD-AE) \\ +2L_4N_4(BE-CD)+2L_4M_4(ED-BF)=0,$$

$$L_5^2(CF-E^2)+M_5^2(AF-D^2)+N_5^2(AC-B^2)+2M_5N_5(BD-AE) \\ +2L_5N_5(BE-CD)+2L_5M_5(ED-BF)=0.$$

Entwickelt man aus diesen die Verhältnisse der Determinanten $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix}$ u. s. f., so kann man mit Hilfe derselben leicht die Quotienten $\frac{A}{F}$, $\frac{B}{F}\cdots$ finden.

605. Der Kegelschnitt ist eine Hyperbel, welche der Gleichung

$$169x^2 + 172xy + 4y^2 - 156x + 24y + 36 = 0$$

entspricht.

606. Die Asymptoten entsprechen der Gleichung

$$Ax + \left(B \mp \sqrt{B^2 - AC}\right)y + D \pm \frac{AE - BD}{\sqrt{B^2 - AC}} = 0.$$

Man ersieht sofort, daß die Asymptoten der Hyperbel reell, die der Ellipse imaginär sind, daß endlich die der Parabel in der Unendlichkeit liegen.

Beispiele. 1. $4x + \left(1 \mp \sqrt{5}\right)y + 3 \pm \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,$

$$2.\ 3x - \left(2 \pm i\sqrt{11}\right)y - 15 \pm \frac{54i}{\sqrt{11}} = 0.$$

607. Die Koordinaten des Schnittpunktes sind:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -D & -E \\ B & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A & B \\ -D & -E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}.$$

Der Schnittpunkt fällt also mit dem Mittelpunkte des Kegelschnittes zusammen. (Vergl. Lösung 530.)

608. Man erhält

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{B^2 - AC}}{A + C}.$$

Beispiel. $\operatorname{tg}\varphi = 2$; $\angle\varphi = 63^0\ 26'\ 5{,}8''$.

609. Bezeichnet man die Koordinaten des Mittelpunktes mit x_0, y_0, so erhält man:

$$y - y_0 = \frac{-A + C \pm \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}}{2B}(x - x_0).$$

Die Halbierungslinien sind reell, auch wenn die Asymptoten imaginär sind, und fallen mit den Achsen zusammen.

Beispiel. Der Kegelschnitt ist eine Ellipse; die Gleichungen der reellen Halbierungslinien sind:

$$y - x + 1 = 0, \quad 3y + 3x + 5 = 0.$$

610. Die Gleichung der Polare ist

$$(Ax_1 + By_1 + D)x + (Bx_1 + Cy_1 + E)y + Dx_1 + Ey_1 + F = 0.$$

Läßt man den Pol mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammenfallen, so nimmt dieselbe die Gestalt an:

$$Dx + Ey + F = 0.$$

Setzt man für x_1 und y_1 die in Lösung 530 entwickelten Mittelpunktskoordinaten ein, so erhält man

$$\text{Const} = 0,$$

d. h. die Polare fällt mit der unendlich fernen Geraden zusammen.

Beispiel. $38x - 37y - 22 = 0$.

611. Die Koordinaten des Poles sind:

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} L & M & N \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}, \quad y_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} A & B & D \\ L & M & N \\ D & E & F \end{vmatrix},$$

wo $\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ L & M & N \end{vmatrix}$ ist.

Beispiel. $x_1 = -4$, $y_1 = -7$.

612. Da in diesem Falle $\Delta = 0$ ist, so folgt, daß der Mittelpunkt in unendlicher Ferne liegt.

613. Führt man Linienkoordinaten ein, so ergiebt sich:

$$\begin{vmatrix} L & M & N \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} u + \begin{vmatrix} A & B & D \\ L & M & N \\ D & E & F \end{vmatrix} v + \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

Die Polaren gehen also alle durch den Pol der Geraden $Lx + My + N = 0$. (Vergl. Lösung 611.)

614. Aus der vorigen Lösung schließt man, daß die Pole der Strahlen auf der Polare des Mittelpunktes des Büschels liegen.

615. Nach Lösung 597 ist das Verhältnis der Abschnitte, in welche die Strecke PQ durch den Kegelschnitt geteilt wird, bestimmt durch die Gleichung

$$U_{22}k^2 - 2U_{12}k + U_{11} = 0.$$

Soll die Teilung eine harmonische sein, so muß $\frac{k_1}{k_2} = -1$ sein. Dies ist aber nur der Fall, wenn

$$U_{12} \equiv (Ax_1 + By_1 + D)\,x_2 + (Bx_1 + Cy_1 + E)\,y_2 + Dx_1 + Ey_1 + F = 0$$

ist. Bezeichnet man die Koordinaten des Punktes Q mit x, y, so ist die Gleichung des geometrischen Ortes

$$(Ax_1 + By_1 + D)\,x + (Bx_1 + Cy_1 + E)\,y + Dx_1 + Ey_1 + F = 0.$$

Der geometrische Ort des Punktes Q ist also die Polare des Punktes P bezüglich des Kegelschnittes. Welcher Satz ergiebt sich daraus?

616. Sind

$$ux_1 + vy_1 + 1 = 0,\quad ux_2 + vy_2 + 1 = 0,\quad u\,\frac{x_1 - kx_2}{1-k} + v\,\frac{y_1 - ky_2}{1-k} + 1 = 0,$$
$$u\,\frac{x_1 + kx_2}{1+k} + v\,\frac{y_1 + ky_2}{1+k} + 1 = 0$$

die Gleichungen der vier harmonischen Punkte auf der Geraden g, so sind die der zugehörigen Polaren:

$$(Ax_1 + By_1 + D)\,x + (Bx_1 + Cy_1 + E)\,y + Dx_1 + Ey_1 + F = 0,$$
$$(Ax_2 + By_2 + D)\,x + (Bx_2 + Cy_2 + E)\,y + Dx_2 + Ey_2 + F = 0,$$
$$(Ax_1 + By_1 + D)\,x + (Bx_1 + Cy_1 + E)\,y + Dx_1 + Ey_1 + F$$
$$-k\,\{(Ax_2 + By_2 + D)\,x + (Bx_2 + Cy_2 + E)\,y + Dx_2 + Ey_2 + F\} = 0,$$
$$(Ax_1 + By_1 + D)\,x + (Bx_1 + Cy_1 + E)\,y + Dx_1 + Ey_1 + F$$
$$+k\,\{(Ax_2 + By_2 + D)\,x + (Bx_2 + Cy_2 + E)\,y + Dx_2 + Ey_2 + F\} = 0.$$

Der Wert des Doppelverhältnisses ist gleich -1, das Büschel also ein harmonisches.

617. Man zieht von dem Punkte P zwei Sekanten S_1 und S_2 in den Kegelschnitt. K möge von S_1 in A und B, von S_2 in C und D geschnitten werden. Verbindet man diese Schnittpunkte, so daß sich AD und BC in R, ferner AC und BD in S schneiden, und zieht endlich die Gerade RS, so ist diese die gesuchte Polare. (Vergl. Lösung 615, und Heft I Aufgabe und Lösung 298.)

618. Man bestimmt nach der vorigen Lösung zu zwei beliebigen Punkten L und M der Geraden g die Polaren p_1 und p_2 bezüglich des Kegelschnittes, dann wird der Schnittpunkt P der beiden Geraden p_1 und p_2 der gesuchte Pol sein.

619. Nach Lösung 617 konstruiert man zunächst die Polare p des Punktes P bezüglich des Kegelschnittes K. Sind F und H die Schnittpunkte des Kegelschnittes und der Polare, so sind PF und PH die gesuchten Tangenten. Welche Fälle sind hier zu unterscheiden?

620. Man verlängert die Verbindungslinie je zweier Punkte bis zum Schnitt mit der Tangente und bestimmt den diesem Schnittpunkte zugeordneten harmonischen Punkt, dann läßt sich die Konstruktion mit Hilfe der vorhergehenden Lösungen leicht zu Ende führen.

621. Es existiert ein System von Kegelschnitten, welche der Anforderung genügen. Die Gleichung dieses Systems ist

$$L_1 L_2 + k L_3^2 = 0.$$

622. $121x^2 + 1254xy + 3249y^2 - 12822x - 5274y - 30663 = 0.$

623. Es ist $k = 6$, demnach die gesuchte Gleichung

$$8x^2 + 9xy + 7y^2 - 8x + 13y = 0.$$

Der Kegelschnitt ist eine Ellipse.

624. Da k in diesem Falle gleich $-\frac{1}{2000}$ ist, so ergiebt sich

$$2025x^2 + 2020xy - 3996y^2 + 9900x + 7960y + 12100 = 0.$$

Der Kegelschnitt ist eine Hyperbel.

625. Sind $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ die Gleichungen der Tangenten, $L_3 = 0$ die der Polare, so entspricht der Kegelschnitt der Gleichung $L_1 L_2 + k L_3^2 = 0$. Mit Hilfe dieser Relation findet man leicht

$$d_1 . d_2 : d_3^2 = -k(L_3^2 + M_3^2) : \sqrt{L_1^2 + M_1^2} . \sqrt{L_2^2 + M_2^2}.$$

Das Verhältnis ist ein konstantes.

626. Ist die von dem Koordinatenanfangspunkte nach dem unendlich fernen Punkte P gerichtete Gerade gegen die X-Achse unter dem Winkel φ geneigt, so ist die Gleichung der Polare

$$x(A\cos\varphi + B\sin\varphi) + y(B\cos\varphi + C\sin\varphi) + D\cos\varphi + E\sin\varphi = 0.$$

Jede Sehne des Kegelschnittes, deren Richtungskonstante $\operatorname{tg}\varphi$ ist, wird durch die Polare halbiert. (Vergl. Lösung 615.)

627. Die Gleichung des Durchmessers läßt sich auch in die Form

$$\cos\varphi\,(Ax + By + D) + \sin\varphi\,(Bx + Cy + E) = 0$$

bringen. Die Durchmesser gehen demnach alle durch den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$Ax + By + D = 0, \quad Bx + Cy + E = 0,$$

d. h. durch den Mittelpunkt des Kegelschnittes. (Vergl. Lösung 530.)

628. $(B + CM)(y - y_0) + (A + BM)(x - x_0) = 0.$

629. Mit Hilfe der Lösung 606 findet man leicht, daß in jeder Asymptote zwei konjugierte Durchmesser zusammenfallen.

630. $y - y_0 = \dfrac{-(A - C) \pm \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}}{2B}(x - x_0).$

(Vergl. Lösung 609.)

631. Die beiden Kegelschnitte schneiden sich in vier Punkten; dieselben sind entweder alle reell, oder alle imaginär, oder zwei derselben sind reell, die andern beiden imaginär. Alle Kegelschnitte, welche durch die Schnittpunkte hindurchgehen, entsprechen der Gleichung $U_1 + kU_2 = 0$, in der k ein variabler Parameter ist. Diese Kurven bilden ein Kegelschnittbüschel, sie können auch dann noch reell sein, wenn die Schnittpunkte der Fundamentalkurven imaginär sind.

632. Zur Bestimmung des Parameters k dient die Gleichung

$$(A_1 + kA_2)(C_1 + kC_2) - (B_1 + kB_2)^2 = 0.$$

Die Wurzeln derselben sind reell, gleich, imaginär, je nachdem

$$\left\{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}\right\}^2 - \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix} \gtreqless 0$$

ist.

Beispiel.

$$(11 \pm 3\sqrt{13})\,x^2 + (10 \pm 2\sqrt{13})\,xy + (7 \mp \sqrt{13})\,y^2$$
$$+ (24 \pm 8\sqrt{13})\,x + (34 \pm 10\sqrt{13})\,y - 10 \pm 14\sqrt{13} = 0.$$

633. Soll der Gleichung $U_1 + kU_2 = 0$ ein Geradenpaar entsprechen, so müssen die Konstanten derselben der Relation

$$\begin{vmatrix} A_1 + kA_2 & B_1 + kB_2 & D_1 + kD_2 \\ B_1 + kB_2 & C_1 + kC_2 & E_1 + kE_2 \\ D_1 + kD_2 & E_1 + kE_2 & F_1 + kF_2 \end{vmatrix} = 0$$

genügen. Da diese Gleichung in Bezug auf k vom dritten Grade ist, so werden also im allgemeinen drei, mindestens aber ein reelles Geradenpaar zu dem Kegelschnittbüschel gehören. Bezeichnen wir

$$\begin{vmatrix} A_1 + kA_2 & B_1 + kB_2 \\ B_1 + kB_2 & C_1 + kC_2 \end{vmatrix}$$

mit $\varDelta$, so folgt:

Ist für eine Wurzel k der kubischen Gleichung $\varDelta$ größer als Null, so ist das Geradenpaar imaginär, der Schnittpunkt desselben (Chordalpunkt) aber reell. Für $\varDelta = 0$ sind die beiden Geraden parallel, liegen getrennt oder fallen zusammen, können reell oder imaginär sein. Ist endlich $\varDelta < 0$, so sind die beiden Geraden reell und schneiden sich. Die Geradenpaare sind entweder reelle oder ideelle gemeinsame Sehnen der Kegelschnitte des Büschels.

634. Zu dem Büschel gehören drei reelle Geradenpaare, welche den Gleichungen

$$\begin{cases} 4y + x - 5 = 0, \\ 3y - x - 9 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y - 2x + 5 = 0, \\ 2y + 3x - 4 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30y - 25x - 24 = 0, \\ 47y + 32x - 115 = 0 \end{cases}$$

entsprechen.

635.
$$\begin{vmatrix} A_1 - C_1 & A_2 - C_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = 0.$$

636. Der Parameter eines Kegelschnitts, welcher von der X-Achse berührt wird, muß der Relation

$$(A_1 + kA_2)(F_1 + kF_2) - (D_1 + kD_2)^2 = 0,$$

dagegen der eines Kegelschnitts, welcher von der Y-Achse berührt wird, der Gleichung

$$(C_1 + kC_2)(F_1 + kF_2) - (E_1 + kE_2)^2 = 0$$

genügen. In einem Kegelschnittbüschel werden demnach im allgemeinen zwei Kurven von der X-Achse und zwei von der Y-Achse berührt.

637. Die in Lösung 528 entwickelten Gleichungen der Örter nehmen in diesem Falle die Gestalt an

$$(A_1 + kA_2)\,x + (B_1 + kB_2)\,y + D_1 + kD_2 = 0,$$
$$(B_1 + kB_2)\,x + (C_1 + kC_2)\,y + E_1 + kE_2 = 0;$$

daraus ergiebt sich durch Elimination des variabeln Parameters k die Gleichung des Ortes

$$(A_1 x + B_1 y + D_1)(B_2 x + C_2 y + E_2)$$
$$- (A_2 x + B_2 y + D_2)(B_1 x + C_1 y + E_1) = 0.$$

Die Mittelpunkte aller Kurven des Büschels liegen demnach auf einem Kegelschnitte.

Beispiel. $11x^2 - 23xy - 3y^2 + 26x + 6y + 9 = 0.$

Der geometrische Ort ist eine Hyperbel.

638. Das System der Polaren entspricht der Gleichung

$$\{(A_1 + kA_2)x_1 + (B_1 + kB_2)y_1 + (D_1 + kD_2)\}x$$
$$+ \{(B_1 + kB_2)x_1 + (C_1 + kC_2)y_1 + E_1 + kE_2\}y$$
$$+ (D_1 + kD_2)x_1 + (E_1 + kE_2)y_1 + F_1 + kF_2 = 0$$

oder

$$(A_1 x_1 + B_1 y_1 + D_1)x + (B_1 x_1 + C_1 y_1 + E_1)y$$
$$+ D_1 x_1 + E_1 y_1 + F_1 + k\{(A_2 x_1 + B_2 y_1 + D_2)x$$
$$+ (B_2 x_1 + C_2 y_1 + E_2)y + D_2 x_1 + E_2 y_1 + F_2\} = 0.$$

Die Polaren des Punktes P bezüglich der Kegelschnitte des Büschels gehen also alle durch einen Punkt Q, d. h. sie bilden selbst ein Büschel. Das Punktepaar P, Q wird ein Polenpaar genannt.

639. Bestimmt man die beiden Punkte, welche die Sehnen der Fundamentalkurven $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ harmonisch teilen, so bilden dieselben bezüglich der Kegelschnitte des Büschels ein Polenpaar und sind demnach die Doppelpunkte der Involution.

640. Die Gleichung des geometrischen Ortes ist

$$\begin{vmatrix} A_1 x + B_1 y + D_1 & B_1 x + C_1 y + E_1 & D_1 x + E_1 y + F_1 \\ A_2 x + B_2 y + D_2 & B_2 x + C_2 y + E_2 & D_2 x + E_2 y + F_2 \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. die Pole der gegebenen Geraden liegen auf einem Kegelschnitte. Wie läßt sich nachweisen, daß dieser Kegelschnitt durch den Schnittpunkt jedes Geradenpaares geht, welches zu dem Büschel gehört?

Beispiel. $5x^2 + 19xy - 11y^2 - 66x + 38y - 71 = 0.$

Der geometrische Ort ist eine Hyperbel.

641. Ist die Y-Achse eine gemeinsame Sehne des Büschels, so entspricht das letztere der Gleichung

$$(A_1 + kA_2)x^2 + 2(B_1 + kB_2)xy + C_1(1 + k)y^2$$
$$+ 2(D_1 + kD_2)x + F_1(1 + k) = 0.$$

Die Gleichung des geometrischen Ortes nimmt in diesem Falle die Gestalt

$$x\{(B_1 D_2 - B_2 D_1)\, x + C_1 (D_2 - D_1)\, y + F_1 (B_1 - B_2)\} = 0$$

an.

Die Pole liegen also auf einem Geradenpaare, und zwar ist eine dieser Geraden die gemeinschaftliche Sehne der Kegelschnitte des Büschels.

642. Die Gleichung des Büschels ist

$$U_1 + k L_1 L_2 = 0.$$

643. Der Kegelschnitt ist eine Hyperbel und entspricht der Gleichung

$$78x^2 - 5xy - 14y^2 - 111x - 2y = 0.$$

644. Die Gleichung des Kegelschnittbüschels ist

$$U_1 + k L_1 L_2 = 0.$$

Ist statt der beiden Tangenten die Berührungssehne $L_3 = 0$ gegeben, so erhält man als Gleichung des Büschels

$$U_1 + k L_3{}^2 = 0.$$

645. Zur Bestimmung des Parameters k ergiebt sich die Relation

$$\begin{vmatrix} 3 + 25k & 1 - 5k \\ 1 - 5k & k - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

woraus folgt: $k = -\frac{1}{3}$. Die Gleichung der Parabel ist sonach

$$8x^2 - 8xy + 2y^2 - 22x - 13y - 19 = 0.$$

646. Determination. Liegt der Schnittpunkt von t und $F_1 F_2$ zwischen den Brennpunkten, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, liegt er dagegen auf der Verlängerung der Verbindungslinie, so ist die Kurve eine Ellipse. Läßt man den einen Brennpunkt in die Unendlichkeit rücken, so erhält man eine Parabel.

647. Determination. Man findet eine Ellipse und eine Hyperbel, welche sich rechtwinklig durchschneiden. Jede dieser beiden Kurven geht in eine Parabel über, wenn man einen der Brennpunkte in unendliche Ferne verlegt.

648. Determination. Der Kegelschnitt ist eine Ellipse, wenn der Punkt F_1 innerhalb des leicht zu konstruierenden Hauptkreises, eine Hyperbel, wenn er außerhalb desselben liegt. Dagegen ist er eine Parabel, wenn die Fußpunkte der von F_1 auf t_1, t_2, t_3 gefällten Lote auf einer Geraden liegen.

649. Man fällt von F_1 Lote auf t_1 und t_2, beschreibt über F_1P als Durchmesser einen Kreis und konstruiert sodann einen zweiten Kreis, welcher durch die Fußpunkte der Lote geht und den ersten Kreis berührt. Der zweite Kreis ist der Hauptkreis des gesuchten Kegelschnittes. Es ergeben sich zwei Lösungen.

650. Der Hauptkreis des gesuchten Kegelschnittes geht durch den Fußpunkt des von F_1 auf t_1 gefällten Lotes und berührt die beiden über F_1P_1 und F_1P_2 als Durchmesser beschriebenen Kreise. Da sich die beiden Hilfskreise durchschneiden, so erhält man nur zwei Lösungen.

651. Die über F_1P_1, F_1P_2, F_1P_3 als Durchmesser beschriebenen Kreise werden von dem Hauptkreise des gesuchten Kegelschnittes berührt. Im allgemeinen erhält man vier Lösungen.

652. Man findet leicht zwei geometrische Örter für den Mittelpunkt des Hauptkreises des Kegelschnittes. Es ergiebt sich nur eine Lösung. Von der Lage des Mittelpunktes hängt es ab, ob der zu konstruierende Kegelschnitt eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel ist.

653. Determination. Es ergiebt sich nur eine Lösung.

654. Determination. Man erhält zwei Ellipsen und zwei Hyperbeln, welche den gestellten Anforderungen genügen.

655. Als geometrische Örter des zweiten Brennpunktes F_2 lassen sich zwei gerade Linien ziehen. Es läßt sich also nur ein Kegelschnitt konstruieren. Ob dieser Kegelschnitt eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel ist, hängt von der Lage des Punktes F_2 zu den gegebenen Stücken ab.

656. Der Abschnitt der Tangente zwischen dem Berührungspunkte und dem Schnittpunkte mit der Direktrix erscheint von dem gesuchten Brennpunkte aus gesehen unter rechtem Winkel. Da sich außerdem die Abstände der Punkte P und P_1 von d_1 wie die Entfernungen dieser Punkte von dem Brennpunkte verhalten, so ergeben sich zwei Kreise als geometrische Örter des Brennpunktes. Im allgemeinen sind demnach zwei Lösungen möglich.

657. Geometrische Örter des der Direktrix d_1 zugehörigen Brennpunktes lassen sich nach der vorhergehenden Lösung leicht finden.

658. Ist S der Schnittpunkt der beiden Geraden p und d, so erscheint die Strecke PS von dem zu d gehörigen Brennpunkte aus gesehen unter rechtem Winkel. Da die Richtung der Achse bekannt ist, so hat man zur Bestimmung dieses Brennpunktes zwei geometrische Örter. Im allgemeinen erhält man zwei Lösungen. Die Art der Kurven wird durch die Lage der gefundenen Brennpunkte bestimmt.

659. Zieht man die Gerade PP_1, welche p_1 in S schneiden möge, so findet man leicht einen Punkt P_2, der mit P die Strecke P_1S harmonisch teilt. Dieser Punkt P_2 gehört dem gesuchten Kegelschnitte an. Über die geometrischen Örter des der gegebenen Direktrix zugehörigen Brennpunktes siehe die Lösungen 656 und 658. Im allgemeinen ergeben sich zwei Lösungen.

660a. Der Schnittpunkt der Sehnen P_1P_2 und P_4P_5 sei Q. Man legt durch P_1 einen Strahl s, der die Verlängerung von P_3P_4 in R schneidet, zieht die Gerade QR, welche P_2P_3 in S treffen möge. Verbindet man nun P_5 und S, so schneidet diese Linie den Strahl s in einem sechsten Punkte des Kegelschnittes. (Siehe Lehrsatz des Pascal.)

660b. Läßt man den Strahl s, dessen Richtung beliebig war, einmal P_2P_3, das andere Mal P_4P_5 parallel laufen, so erhält man in beiden Fällen parallele Sehnen des Kegelschnittes, mit deren Hilfe sich geometrische Örter des Mittelpunktes konstruieren lassen.

661. Die Konstruktion ist durch wiederholte Anwendung der Lösung 599 auszuführen.

662. Man zieht die Gerade P_1P_2, welche t in A schneiden möge. Legt man sodann durch A einen beliebigen Strahl s, welcher die Verlängerung von P_2P_3 in B, die von P_3P_4 in C trifft, so schneiden sich die Verbindungslinien BP_4 und CP_1 in einem fünften Punkte des Kegelschnittes.

663. Die Tangente t_1 möge die Verlängerung von P_2P_3 in A, ferner möge die Tangente t_2 die Verlängerung von P_3P_1 in B schneiden, dann trifft die Gerade P_1P_2 die Verbindungslinie AB in einem zweiten Punkte der gesuchten Tangente.

664. Wir bezeichnen den Durchschnittspunkt von t_1 und t_2 mit P_1, den von t_2 und t_3 mit P_2, den von t_3 und t_4 mit P_3 u. s. f. Sodann nehmen wir auf t_5 einen Punkt M an und ziehen MP_2,

ferner $P_1 P_4$. Ist N der Schnittpunkt dieser beiden Geraden, so verbinden wir P_3 mit N und verlängern diese bis zum Schnitt mit t_1 in L, dann ist LM die gesuchte Tangente.

665. Die Bezeichnung der Schnittpunkte der Tangenten sei dieselbe wie in der vorhergehenden Lösung. Die beiden Diagonalen $P_1 P_3$ und $P_2 P_4$ mögen sich im Punkte N schneiden. Verbinden wir N mit P_5, so trifft die Verlängerung dieser Verbindungslinie die Tangente t_3 in dem Berührungspunkte derselben.

666. Man bestimmt zunächst nach der vorhergehenden Lösung die Berührungspunkte der Tangenten und findet mit Hilfe derselben nach Lösung 660b leicht den Mittelpunkt des Kegelschnittes.

667. Konstruiert man mit Hilfe der gegebenen Stücke ein Tangentensechseck, so lassen sich leicht beliebig viele andere Tangenten, sowie die Berührungspunkte derselben finden.

668. Es mögen sich t_1 und t_2 in C, t_2 und t_3 in A, t_3 und t_1 in B schneiden. Man verbinde A mit P_1, B mit P_2 und den Schnittpunkt M dieser beiden Transversalen mit C, so trifft die Verlängerung dieser Verbindungslinie t_3 in dem gesuchten Berührungspunkte.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Von J. Henrici, Professor am Gymnasium zu Heidelberg, und P. Treutlein, Professor am Gymnasium zu Karlsruhe. gr. 8. Erster Teil: Gleichheit der planimetrischen Größen. Kongruente Abbildung in der Ebene. Pensum der Tertia. Mit 188 Figuren in Holzschnitt. 1881. geh. ℳ 2.— Zweiter Teil: Perspektivische Abbildung in der Ebene. Berechnung der planimetrischen Größen. Pensum der Sekunda. (Nebst weiteren Ausführungen für Prima.) Mit 189 Figuren in Holzschnitt und einem (lithogr.) Kärtchen. 1882. geh. ℳ 2. 80.

Elemente der Geometrie. Von J. Frischauf, Professor in Graz. 2. umgearbeitete Auflage. gr. 8. 1877. geh. ℳ 2.—

Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie des Maasses. Ein Lehrbuch von Dr. O. Schlömilch. Erstes Heft: Planimetrie. 6. Aufl. 8. 1883. geh. ℳ 2.—

——— ——— **II. Theil: Geometrie des Raumes. 3. Aufl.** gr. 8. 1874. geh. ℳ 4.—

Leitfaden der ebenen Geometrie mit Benutzung neuerer Anschauungsweisen für die Schule. I. Theil erstes Heft. Die geradlinigen Figuren und der Kreis. Mit Uebungen. Von Dr. Hubert Müller. Zweite umgearbeitete Auflage. (Mit vielen Holzschnitten im Text und 2 lithogr. Tafeln.) gr. 8. 1878. geh. ℳ 1. 60.

——— **I. Theil zweites Heft. Anhang: Erweiterungen zu** Theil I und Einleitung in die neuere Geometrie. Mit Uebungen. Zweite umgearbeitete Auflage. (Mit vielen Holzschnitten im Text u. 2 lithogr. Tafeln.) gr. 8. 1878. geh. ℳ 1. 20.

——— **II. Theil. Die Kegelschnitte und die Elemente der** neueren Geometrie. gr. 8. 1875. geh. ℳ 1. 60.

Die Kegelschnitte in synthetischer Behandlungsweise für die Prima höherer Lehranstalten. Von Dr. A. Dronke. Mit Figuren im Text. gr. 8. 1881. geh. ℳ 2.—

Grundriss einer elementar-geometrischen Kegelschnittslehre. Von H. G. Zeuthen. gr. 8. 1882. geh. ℳ 2.—

Die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. Zum Gebrauche in der Gymnasialprima bearbeitet von Dr. W. Erler, Prof. u. I. Oberlehrer am Kgl. Pädagogium in Züllichau. Mit einer lithographirten Figurentafel. 2. Aufl. gr. 8. 1881. geh. ℳ 1.—

Lehrbuch der ebenen Geometrie nebst Repetitionstafeln. Für Bürger-, Gewerbe- und höhere Stadtschulen sowie zum Selbstunterrichte. Mit einem besonderen Heft Figurentafeln. Von Direktor Dr. W. Zehme zu Barmen. Sechste verbesserte Auflage. gr. 8. 1880. geh. ℳ 2. 40.

Leitfaden der ebenen Geometrie mit 700 Uebungssätzen und Aufgaben. Von Dr. Julius Kober. gr. 8. 1874. geh. ℳ 1.—

Lehrbuch zur Einführung in die Geometrie für höhere Schulen. Von Dr. H. Börner, Oberlehrer an der Realschule zu Ruhrort. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. gr. 8. 1879. geh. ℳ 1. 60.

Vorschule zur Geometrie. Von Dr. Th. Reishaus, Oberlehrer am Gymnasium zu Stralsund. Erste Abtheilung: Lehrbuch. (Mit vielen Figuren im Text.) gr. 8. 1879. geh. ℳ. 2.—

——— ——— **Zweite Abtheilung. Wiederholungs- und** Aufgabenbuch. (Mit vielen Figuren im Text.) gr. 8. 1879. ℳ 1. 20.

AUFGABEN

AUS DER

ANALYTISCHEN GEOMETRIE

DER EBENE

VON

Dr. ADOLF HOCHHEIM,

PROFESSOR.

HEFT II.

DIE KEGELSCHNITTE.

ABTEILUNG I.

B. AUFLÖSUNGEN.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

LEIPZIG,

VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1883.